学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

迎春杯数学竞赛指导讲座

第二册

内部资料 非卖品

前言

我国自 1955 年举办高中学生的数学竞赛以来，至今已 38 年了。中间虽然中断过一个时期，但自 1978 年恢复了这项活动以后，可谓更加蓬勃地发展起来，不仅中国数学会继续举办高中学生的数学竞赛，而且各地的数学分会和数学教学研究会还先后举办了初中学生的数学竞赛和小学生（高年级）的数学竞赛。自 1985 年开始，还选派高中学生参加了历届的国际数学奥林匹克的竞赛（即 IMO—International Mathemeti－cal Olympics），并取得了优异的成绩。近年来，在国内还举行了中学生的物理、化学等学科的竞赛活动，有的也参加了国际的竞赛活动，并且也取得了好成绩。

举办高中学生数学竞赛的目的，和举办初中、小学学生数学竞赛的目的，是不会相同的：举办高中学生数学竞赛的目的，首先在于发现学习数学的素质较高的学生，经过一定的培养，成为发展我国数学研究的后备力量。其次则在于通过数学竞赛，促使更多的学生喜爱数学、学好数学，以适应社会发展对基础教育阶段的数学教育的需要。当然，举办数学竞赛的目的，也在于促进学校提高数学教学的质量。举办初中、小学生数学竞赛的目的，则首先在于促使更多的学生喜爱数学、学好数学；与此相应的则在于促进初中、小学数学教学质量的提高。当然，发现学习数学的素质高的学生，也应考虑予以适当的培养，但这不是主要的目的。回顾十几年来全国各地举办的各级数学竞赛，不仅参加竞赛的学生取得了好成绩，而且参加竞赛的学生也在逐年增加。不仅越来越多的受到学生的重视和欢迎，而且也得到老师们和学生家长的赞扬和支持。之所以取得这样好的成效，其原因主要就在于举办数学竞赛的上述的目的是正确的；举办数学竞赛的工作是符合上述的目的的。

根据上述的目的，对高中学生数学竞赛内容（竞赛题）的选择，虽然基础在于他们在课内之所学，但不论在深度上还是在难度上，都是超出较多的。对初中、小学生数学竞赛内容的选择，虽然在深度、难度上要略高于课内之所学，但应与课内所学结合得更密切些，而且对课内所学的掌握也适当地进行竞赛。

这样，不论是准备参加哪一级数学竞赛的学生，在参加竞赛前，都将作一定的准备。或自己搜集有关的资料进行准备；或求教于老师，请老师作准备辅导。这样地准备，虽然确能取得一定的成效，但总以没有一本教材性的书籍，即没有一本为学生准备参加数学竞赛用的、既讲授一些必要的数学知识，又对参加竞赛的准备进行指导的书籍，感到遗憾。

北京师范大学出版社有鉴于此，为了帮助各竞赛学科的参加者作好竞赛前的准备，于 1992 年秋决定出版《奥林匹克中小学系列教材》，邀请各学科的水平高，并在辅导学生方面有丰富经验的教师，分头编写各学科的《奥林匹克中小学系列教材》。

由《中小学数学教学报》编辑部和北京教育局教研部数学教研室于 1985 年开始，先后陆续地举办了每年一度的《迎春杯小学数学竞赛》和《迎春杯初中一年级数学竞赛》。于 1991 年，在举办过 7 届竞赛经验的基础上，还编订了《小学数学竞赛大纲（试行草案）》，并且连同历年来对学生进行参加竞赛辅导使用过的材料一起编辑成册，出版了《小学迎春杯数学竞赛指导讲座》。1992 年秋，更计划在这部《指导讲座》的基础上，予以充实和修改，以便成为更好的一部供小学高年级学生用来准备参加数学竞赛适用的书籍。

时逢其会，北京师范大学出版社乃与《指导讲座》的编者商定，将这项充实、修改计划纳入《奥林匹克中小学系列教材》的出版计划，这样，便由北京师范大学出版社作为《奥林匹克中小学系列教材》的一部份出版了。

新版迎春杯数学竞赛《指导讲座》和《试题汇编》运用于小学和初一年级。是以在北京市举办小学数学竞赛的经验为主而编写的，不敢说也适合兄弟省、区、市的实际情况。因此希望广大的读者，老师们、同学们多提宝贵的意见和建议。

《奥林匹克中小学系列教材——初中数学》虽然是在近年来各地举办竞赛的经验基础上，特别是在举办《华罗庚金杯数学竞赛》经验的基础上编写的，但经验不多，难免挂一漏万。因此也希望广大的读者，老师们、同学们多提宝贵的意见和建议。

《奥林匹克中小学系列教材——高中数学》是在较长时期的举办高中学生数学竞赛经验的基础上编写的。但编写成教材性的书籍还没有经验，这次还是创举。因此也希望广大的读者，老师们、同学们多提宝贵的意见和建议。

我们的水平有限，经验不多，编写出的这三部教材中，错误、不妥处在所难免，深切盼望广大读者指出错误、不妥之处，以便我们及时修正，使得教材日臻完善。

《奥林匹克中小学系列教材》——
《小学数学》、《初中数学》、《高中数学》
编者谨识
1993 年 5 月 16 日

第一讲　质数与合数（一）

质数与合数概念是数学运算、算式化简以及分析一些数字问题时常用到的。

如果一个比 1 大的自然数只有两个约数：1 和本身，那么这个自然数就叫质数。质数也叫素数。例如：43＝1×4343 只有 1 和 43 两个约数，所以 43 是质数。100 以内的质数是极为常用的，它们是

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97

在自然数中，如果除了 1 和本身两个约数，还有其它的约数，这个自然数就叫合数。例如：6 的约数有 1、2、3、6，那么 6 是合数。合数也叫复合数或合成数。应特别注意 1 既不是素数也不是合数。

例 1　求出 924 的质数约数的和。

解：我们要充分利用数字的整除特征，运用短除的形式，把 924 作质约数分解。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 924 \\ \hline 2 & 462 \\ \hline 3 & 231 \\ \hline 7 & 77 \\ \hline & 11 \end{array}$$

924＝11×2×2×3×7

质约数有：11、2、3、7，其和为 11＋2＋3＋7＝23。

例 2　求出 852 的约数。

分析：我们首先可把 852 的质数约数求出来进而求出全部约数。注意：1，852 也是约数。

解：852＝2×2×3×71

约数有 1，2，3，4，6，12，71，142，213，284，426，852 共 12 个约数。

一般地：对一个自然数作质约数分解（也称质因数分解）

$A=a_1^{n_1}\times a_1^{n_2}\cdots\cdots a_m^{n_m}$（其中 a_1，$a_2\cdots$，a_m 是不同的质数，n_1，n_2，…，n_m 都是正整数）

A 的约数个数有（n_1＋1）×（n_2＋1）×……×（n_m＋1）个。

例 3　有两个两位数的积是 3927，这两个数的和是几？

解：首先将这个积做质因数分解

3927＝3×7×11×17

把这四个质因数适当搭配可以得到这两个两位数是 3×17＝51，7×11＝77。

所以两数的和是 51＋77＝128。

例4 比 $\frac{1}{2}$ 大比 5 小，并且分母是 13 的最简分数有多少个？

分析：我们可以把分母是 13 的分数按照规定的范围先列出来，再将其中分子是 13 的倍数的那些分数去掉。

解：$\frac{1}{2}=\frac{6}{12}<\frac{7}{13}$　$5=\frac{65}{13}$　$\frac{7}{13}\le x<\frac{65}{13}$

分子应在 7 至 64 这 58 个自然数中选择，因为 13 是质数，去掉 13，26，39，52，用余下的 54 个自然数做分子，可以得到 54 个满足条件的最简分数。

例 5　有八个数 693，35，48，28，175，108，363，165 把它们分为两组，使两组数的积相等。

分析：要使两组数的乘积相等，那么两组中相同质因数的个数一定相等。首先，将它们分解质因数。

$693=3^2\times7\times11$　　　　$175=5^2\times7$

$28=2^2\times7$　　　　$35=5\times7$

$108=2^2\times3^3$　　　　$363=11^2\times3$

$165=3\times5\times11$　　　　$48=3\times2^4$

为了观察得清楚，我们将他们放在一个表格中：

	2	3	5	7	11	组别
693		2		1	1	A
175			2	1		B
35			1	1		A
28	2			1		B
108	2	3				B
363		1			2	B
165		1	1		1	A
48	4	1				A

这 8 个数的分组情况

一组是：693，35，165，48

另一组是：175，28，108，363

例 6　要使四个数的积

135×1925×486×（　　）结果的最后五位都是零，括号中的数最小填入几？

分析：要使乘积结果的最后五位是零，就应当使这四个数中保证有五对 2 和 5 的因子。

解：首先将前面三个数字分解质因数：

$135=3^3\times5$

$1925=5\times5\times7\times11$

$486=2\times3^5$

它们当中共有三个 5，一个 2。应再补上两个 5，四个 2，括号中的数最少应当取 $5\times5\times2\times2\times2\times2=400$。

例 7　合数 3570，有很多的约数，其中最小的三位约数是多少？

分析：如果我们一味地把 3570 的质因子凑成满足条件的三位数，也是可以的。还可将三位数由小到大逐个分解质因数，看其因子是否都是 3570 的因子即可。

$3570=2\times3\times5\times7\times17$

三位数从小到大：100，101，102，103……

$100=5^2\times2^2$　显然 100 中因子里 5 和 2 各多一个，100 不是 3570 约数，

101 是质数，也不是 3570 的约数，102＝2×3×17　　2，3，17 都是 3570 的质因子，所以 102 是 3570 最小的三位约数。

例 8　九个连续的自然数，它们都大于 80，那么其中质数最多有几个？

分析：我们用不同的条件做筛子，逐步加强条件的限制，使其结果明显化。

由于大于 2 的质数一定是奇数，而大于 80 的九个连续自然数至多只有 5 个奇数，所以质数的个数不大于 5 个。

我们知道：在三个连续的奇数中至少有一个数是 3 的倍数。所以这五个连续奇数中至少有一个是合数。因此，质数至多只有四个。

如：101－109 中，质数有 101，103，107，109

例 9　把 33 拆成若干个不同质数之和，如果要使这些质数的积最大，问这几个质数分别是多少？

分析：首先假设可以分成五个质数之和（分成 6 个以上质数之和不可能）：33 是奇数，因此五个质数中不能有 2（否则和是偶数），取最小连续五个奇质数 3，5，7，11，13 的和是 39 超过 33。所以分成五个是不可能的。

假设 33 可以分成四个质数之和，33 是奇数，因此四个数中一定有一个是偶质数 2，即其余三个的和是 31，显然可以找出其余三个分别是：3，5，23　3，11，17　7，11，13　5，7，19　　三数乘积最大的是 7×11×13＝1001　假设 33 可分成三个质数和，只可能是

3，13，17；

3，11，19；

3，7，23；

5，11，17；

乘积均小于 2×7×11×13，33 若分为两个质数之和，只可能是 2 和 31，乘积仅为 62。故应将 33 写成四个质数：2，7，11，13 的和。

例 10　A，B，C 是三个自然数，已知：[A，B]＝42，[B，C]＝66，（A，C）＝3，求所有满足上述条件的 A，B，C。

说明：[A，B]表示 A，B 的最小公倍数，（A，B）表示 A，B 两数的最大公约数。

解：由[A，B]＝42＝2×3×7 可知 A，B 中只含有 2，3，7 的质因子。

由[B，C]＝66＝2×3×11 可知 B，C 中只含有 2，3，11 的质因子。

因此，B 的因子只可能取 2，3。

又因为（A，C）＝3，A，C 都含有 3 的因子，且 A，C 不同时含有 2 的因子，这样 B 中一定含有 2 的因子。

下面我们排一个表格，将 A，B，C 的数值写进去。

A	3×7	3×7	2×3×7	3×7	3×7	2×3×7
B	2	2	2	2×3	2×3	2×3
C	3×11	2×3×11	3×11	3×11	2×3×11	3×11

可以看出，满足条件的 A，B，C 有六组。

由于一个整数的质因数分解是唯一的，这往往就成为我们进一步分析问题的一个理想的出发点。

习题一

1．把下面的整数分解质因数：

1001，546，1993

2．由 1、2、3、4、5、6、7、8、9 这九个数字组成的九位数是质数吗？

3．把下列八个数，分为两组，每组四个数，使两组数的积相等，问如何分？

14，33，35，75，39，30，143，169

4．自然数 199119921993，除本身之外最大的约数是几？

5．要使 975×935×972×（　　）的积，最后四位都是“零”，括号中最小填入几？

6．200 除以一个两位数质数，余数是 14，求这个两位数。

第二讲　简单几何图形的面积计算

一、基本概念

（一）几个基本概念

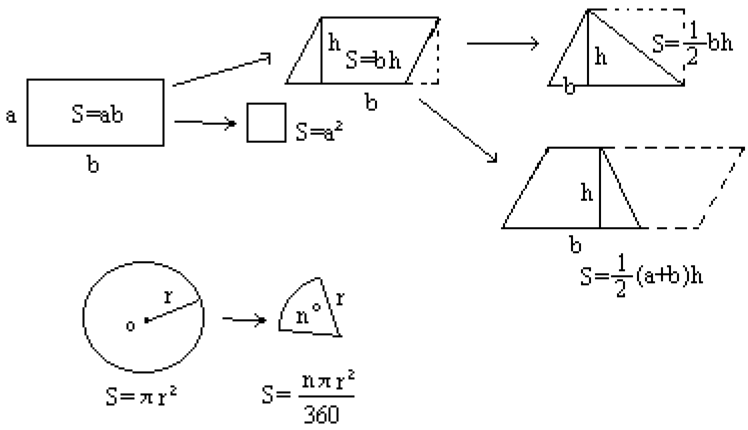
1．平面图形　图形上所有的点都在同一平面内的图形，叫平面图形。如三角形、长方形、正方形、平行四边形、梯形、圆、扇形等。

2．面积　平面图形所围的平面部分的大小，叫这个图形的面积。

3．全等形　如果两个平面图形叠合在一起，能够处处重合，便称这两个图形为全等形。

4．等积形　面积相等的两个图形，叫等积形、全等形一定是等积形。

（二）常用的面积公式及其联系图



（三）几个重要结论

如果两个三角形的底和高分别相等，那么这两个三角形的面积相等。

如果两个三角形的底（或高）相等，那么它们的面积之比，等于它们高（或底）的比。

二、几种常用的求面积方法

（一）利用公式计算面积

例 1　图 2－1 是一块长方形耕地，它由四个小长方形拼合而成，其中三个小长方形的面积分别为 15、18、30 公顷，问图中阴影部分的面积是多少？

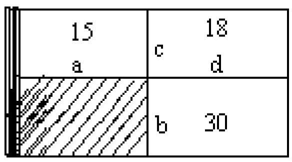


图2—1

分析与解　因为阴影部分也是一长方形，所以只要求出它的长、宽是多少就行，为此设它的长、宽分别为 a、b，面积为 18 公顷的长方形的长、宽分别为 c、d，按公式便有：

a×c＝15，c×d＝18，b×d＝30，

因为（a×c）×（b×d）＝15×30，

而（a×c）×（b×d）

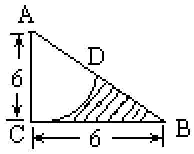
$=(a\times b)\times(c\times d)$

$=18\times(a\times b)$

所以 $a\times b=15\times30\div18=25$

答：阴影部分的面积为 25 公顷。

例 2　图 2－2 中的三角形 ABC 是直角三角形，ACD 是以 A 为圆心、AC 为半径的扇形。求图中阴影部分的面积是多少？（π＝3.14）



（单位：厘米）

图2—2

分析与解　从图上可以看出，阴影部分的面积，等于三角形 ABC 的面积与扇形 ACD 面积的差，因为三角形 ABC 是直角三角形，AC＝BC＝6厘米，所以三角形ABC的面积为 $\frac{1}{2}\times6\times6=18$（平方厘米）。三角形ABC还是一个等腰直角三角形，所以角CAD为45°，扇形ACD的面积为 $\frac{45}{360}\times\pi\times6^2=4.5\times\pi=14.13$（平方厘米）

影阴部分的面积为：18－14.13＝3.87（平方厘米）

答：阴影部分的面积为 3.87 平方厘米。

（二）布列简易方程求图形的面积

例 1　在图 2－3 中，ABCD 是一长方形，BC＝9 厘米，CD＝6 厘米，且三角形 ABE、三角形 ADF 和四边形 AECF 的面积彼此相等，求三角形 AEF 的面积是多少？

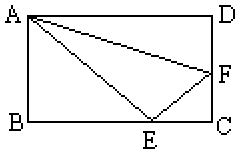


图2—3

分析与解　从图中可以看出，三角形 AEF 的面积，等于四等边 AECF 的面积与三角形 ECF 面积之差，由于三角形 ABE、三角形 ADF 和四边形 AECF 的面积彼此相等，而长方形 ABCD 的面积为（6×9＝）54 平方厘米，所以四边形 AECF 的面积为 54÷3＝18（平方厘米）。另外只要算出 EC、FC 的长度，便能求出三角形 CEF 的面积。

因为三角形 ABE、ADF 是直角三角形，面积都是 18 平方厘米。而根据面积公式有

$18=\frac{1}{2}\times AB\times BE$，$18=\frac{1}{2}\times AD\times DF$，

AB＝6 厘米，AD＝9 厘米，即得两个简易方程：

$\frac{1}{2}\times6\times BE=18$，$\frac{1}{2}\times9\times DF=18$

解得：BE＝6 厘米，DF＝4 厘米。

CF＝CD－DF＝6－4＝2（厘米），

EC＝BC－BE＝9－6＝3（厘米）

三角形 AEF 的面积为：

$18-\frac{1}{2}\times FC\times CE=18-\frac{1}{2}\times 2\times 3=15$（平方厘米）。

答：三角形 AEF 的面积为 15 平方厘米。

例 2　在图 2－4 中，三角形 ABC 是直角三角形，AB 是圆的直径，且 AB＝20 厘米。如果图中阴影 I 的面积比阴影 II 的面积大 7 平方厘米，那么 BC 长多少厘米（π＝3.14）？

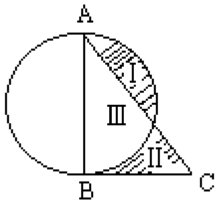


图2—4

分析与解　因为三角形ABC的面积为$\frac{1}{2}\times AB\times BC$，而AB＝20厘米，

所以只要求出三角形 ABC 的面积是多少，便可求出 BC 的长度来。

从图上可以看出，阴影 I 的面积加上 II 的面积，等于圆面积的一半。阴影 II 的面积加上 II 的面积，等于三角形 ABC 的面积，再利用用阴影 I 的面积比阴影 II 的面积大 7 平方厘米，便可得到下面的等式：

$\frac{1}{2}\times \pi\times(\frac{20}{2})^2=\frac{1}{2}\times 20\times BC+7$，

BC＝（157－7）÷10＝15（厘米）。

答：BC 长 15 厘米。

（三）巧添辅助线计算图形的面积

例 1　在图 2－5 中，ABCD 是边长为 9 厘米的正方形，M、N 分别为 AB 边与 BC 边的中点，AN 与 CM 相交于点 O，求四边形 AOCD 的面积是多少？

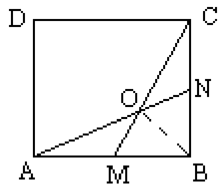


图2—5

分析与解　从图上可以看出：四边形 AOCD 的面积，等于正方形 ABCD 的面积与四边形 ABCO 面积的差。添辅助线 OB 之后，又知四边形 ABCO 的面积，等于三角形 ABO 与 BCO 面积之和。

因为 AB＝BC，M、N 又分别为 AB、BC 的中点，所以有三角形 BON 的面积等于三角形 CON 的面积。

三角形 AMO 的面积等于三角形 MOB 的面积，

三角形 ABN 的面积等于三角形 BCM 的面积。

又因为三角形 AMO 的面积等于三角形 ABN 的面积减去四边形 MBNO 的面积。

三角形 CON 的面积等于三角形 BCM 的面积减去四边形 MBNO 的面积，

所以三角形 AMO 的面积等于三角形 NOC 的面积，这样一来，三角形 ABN 的面积是三角形 AMO 面积的三倍，四边形 ABCO 的面积是三角形 AMO 面积的四倍，而三角形ABN的面积＝$\frac{1}{2}$×AB×BN＝$\frac{1}{2}$×9×（$\frac{1}{2}$×9）

＝20.25（平方厘米），

三角形 AMO 的面积＝20.25÷3＝6.75（平方厘米），

四边形 ABCO 的面积＝6.75×4＝27（平方厘米），

四边形 AOCD 的面积＝9×9－27＝54（平方厘米）。

答：四边形 AOCD 的面积为 54 平方厘米。

例 2　在图 2－6 中，四边形 ABCD 的对角线 AC 与 BD 交于点 E，且 AF＝CE，BG＝DE，当四边形 ABCD 的面积为 25 平方厘米时，三角形 EFG 的面积是多少？

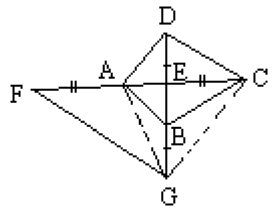


图2—6

分析与解　从图中可以看出：

三角形 EFG 的面积等于四边形 ABGF 的面积与三角形 ABE 面积之和。只要找到四边形 ABGF 与三角形 AED、CDE、BCE 面积之间的关系，问题可望解决。为此可添辅助线 AG 与 CG。

因为 AF＝CE，且三角形 AFG 中 AF 边上的高与三角形 CEG 中 CE 边上的高相等，所以三角形 AFG 与三角形 CEG 的面积相等。又因为 BG＝DE，且三角形 ABG 与三角 ADE 的高，三角形 BCG 与三角形 CDE 的高分别相等。所以三角形 ABG 与三角形 ADE 的面积，三角形 BCG 与三角形 CDE 的面积也分别相等。

四边形 ABGF 的面积等于三角形 AGF 的面积加三角形 ABG 的面积等于三角形 CEG 的面积加三角形 ADE 的面积等于三角形 BCE 的面积加三角形 CDE 的面积加三角形 ADE 的面积。

这样一来三角形 EFG 的面积与四边形 ABCD 的面积相同，所以三角形 EFG 的面积为 25 平方厘米。

答：三角形 EFG 的面积为 25 平方厘米。

（四）利用割补法求图形的面积

例 1　在图 2－7 中有两个边长均为 2 厘米的正方形，其中一个正方形的某一个顶点，正好在另一个正方形的中心位置上。且图中两个阴影三角形面积相等。问这两个正方形不重合部分的面积和是多少？

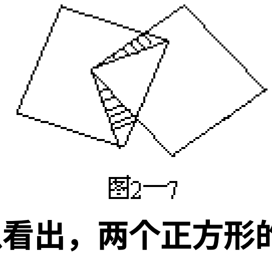


图2—7

分析与解　从图中可以看出，两个正方形的重叠部分是一个四边形，其面积不容易直接求出。但条件告诉我们，图中两个阴影三角形的面积相等，

而这两个三角形各有一条边是正方形对角线长度的一半，还有两组角彼此相等，通过叠合演示可以判定这两个三角形是全等三角形，这一来可将两个正方形重叠的哪个阴影三角形“割”下来，“补”到另一个阴影三角形所在位置上去。这样一来，重叠部分四边形的面积与一个三角形的面积相等。而这个三角形的面积正好是正方形面积的四分之一。

因为正方形边长为 2 厘米，所以正方形面积为 4 平方厘米。重叠部分的面积为：$4\times\frac{1}{4}=1$（平方厘米）。

两个正方形不重叠部分的面积和为：

4×2－1×2＝6（平方厘米）。

答：（略）。

例 2　求图 2－8 中阴影部分的面积是多少（π＝3.14）？

分析与解　从图上可以看出，大直角三角形是由两个全等的直角边长为 2 厘米的等腰直角三角形拼成的。直接求图中阴影部分的面积比较麻烦。仔细观察图形可以发现，图形左、右两半关于大直角三角形斜边上的高线是对称的。如果从中间高线处将图形剪开，再把左半部分按逆时针方向转 180°，拼在右半部下面，得图 2－9，从图 2－9 可以看出，阴影部分的面积，等于半圆的面积减去等腰直角三角形的面积。这个等腰直角三角形的直角边的长度，正好是圆的半径，而圆的半径为 2 厘米。这样一来便有下面的解法。

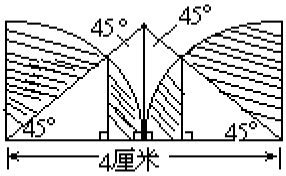


图2—8

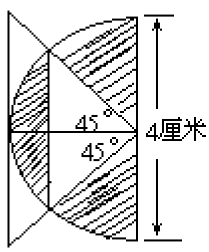


图2—9

半圆的面积为$\frac{1}{2}\times\pi\times r^2=\frac{1}{2}\times3.14\times4$

＝6.28（平方厘米），

等腰直角三角形的面积为$\frac{1}{2}\times2\times2=2$（平方厘米），

阴影部分的面积为 6.28－2＝4.28（平方厘米）。

答：（略）。

（五）利用变形法求图形的面积

前面谈到的“割补法”的主要思路是：“割”下图形的某一部分，再将它改变位置后“补”在图形的剩余部分上，使图形变为一个面积容易求出的图形。而这里谈到的“变形法”，是区别于“割补法”的另一类等积变形。

其特点是不需要“割补”，只利用我们前面提到的结论作一系列等积代换，便可解决问题。

例 1　在图 2－10 中，直线 CF 与平行四边形 ABCD 的 AB 边相交于 E 点，如果三角形 BEF 的面积为 6 平方厘米，求三角形 ADE 的面积是多少？

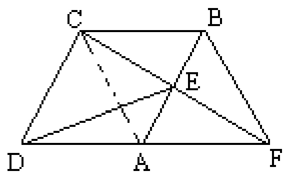


图2—10

分析与解　连 AC，因为 AB 平行 CD，AE 是三角形 ADE、ACE 的公共底边，所以三角形 ADE 与三角形 ACE 的面积相等。

又因为 BC 平行于 AF，AF 是三角形 AFC 与三角形 ABF 的公共底边，所以三角形 ACF 与三角形 ABF 的面积相等。

从图 2－10 中可以看出

三角形 ACF 的面积＝三角形 ACE 的面积＋三角形 AEF 的面积，三角形 ABF 的，面积＝三角形 BEF 的面积＋三角形 AEF 的面积。

从上面这两个等式可以得到

三角形 ACE 的面积＝三角形 BEF 的面积、而三角形 BEF 的面积为 6 平方厘米，所以三角形 ACE 的面积也为 6 平方厘米，再根据三角形 ADE 与三角形 ACE 面积相等这一结论，最后可知三角形 ADE 的面积为 6 平方厘米。

答：（略）。

例2　在图2—11的三角形ABC中，$AE=\frac{1}{5}AC$，$CD=\frac{1}{4}BC$，$BF=\frac{1}{6}AB$。

那么$\frac{\text{三角形DEF的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}=$？

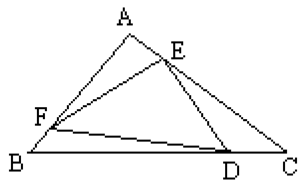


图2—11

分析与解　我们知道，<u>如果三角形的底（或高）相等，那它们的面积比等于它们高（或底）的比。</u>现在利用这一结论来解这个题。

在图 2－11 上添一条辅助线 AD（见图 2－12）。在图 2－12 中，三角形ABC、ACD的高相等，而且$CD=\frac{1}{4}BC$，所以有

$$\frac{\text{三角形ACD的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}=\frac{1}{4}$$

另外三角形ACD与三角形CDE的高相等，而且$CE=\frac{4}{5}AC$，所以有

$$\frac{\text{三角形CDE的面积}}{\text{三角形ACD的面积}}=\frac{4}{5}$$

把上面两式相乘，得

$$\frac{\text{三角形ACD的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}\times\frac{\text{三角形CDE的面积}}{\text{三角形ACD的面积}}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{5},$$

化简得 $\frac{\text{三角形CDE的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}=\frac{1}{5}$，即

三角形CDE的面积 $=\frac{1}{5}\times$ 三角形ABC的面积。

在图 2－12 中，再连结 BE，从图中可以看出，三角形 ABC、ABE 的高相等，而且 $AE=\frac{1}{5}AC$，所以有 $\frac{\text{三角形ABE的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}=\frac{1}{5}$。

另外三角形ABE与三角形AEF的高相等，而 $BF=\frac{1}{6}AB$，所以有

$$\frac{\text{三角形AEF的面积}}{\text{三角形ABE的面积}}=\frac{5}{6},$$

把上面两式相乘，得

$$\frac{\text{三角形ABE的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}\times\frac{\text{三角形 AEF 的面积}}{\text{三角形ABE的面积}}=\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}$$

化简得：$\frac{\text{三角形AEF的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}=\frac{1}{6}$，即

三角形AEF的面积 $=\frac{1}{6}\times$ 三角形ABC的面积。

在图 2－12 中，再连结 CF，利用上面同样的方法可得

三角形BDF的面积 $=\frac{1}{8}\times$ 三角形ABC的面积。

设三角形 ABC 的面积为“1”个面积单位，则有

$$\frac{\text{三角形DEF的面积}}{\text{三角形ABC的面积}}=\frac{1-\frac{1}{5}-\frac{1}{8}-\frac{1}{6}}{1}=\frac{61}{120}$$

答：（略）。

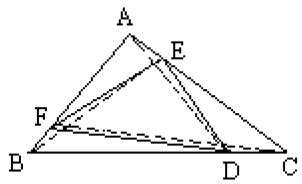


图2—12

习题二

1．在图 2－13 中，ABCG 和 CDEF 分别为边长为 10 厘米、12 厘米的正方形。求图中阴影部分的面积是多少？

2．在图 2－14 中，ABCD 是个长方形，弧 DF 和 DE 是分别以 A、C 为圆心，AF、CD 为半径画出的。求图中阴影部分的面积是多少（π＝3.14）？

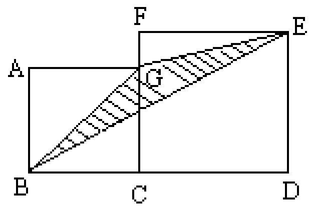


图2—13

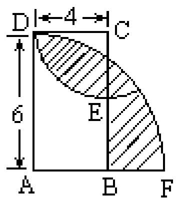


图2—14（单位：厘米）

3．在图 2－15 中的平行四边形的面积为 48 平方厘米，高为 6 厘米，求图中阴影部分的面积是多少？

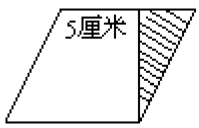


图2—15

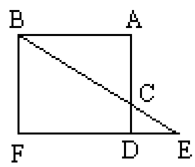


图2—16

4．在图 2－16 中，正方形 ABFD 的面积为 100 平方厘米，直角三角形 ABC 的面积，比直角三角形（CDE 的面积大 30 平方厘米，求 DE 的长是多少？

5．在图 2－17 中，长方形 ABCD 的面积为 36 平方厘米，E、F、G 分别为边 AB、BC、CD 的中点，H 为 AD 边上的任一点。求图中阴影部分的面积是多少？

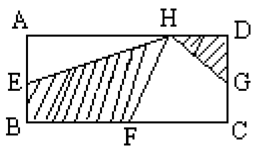


图2—17

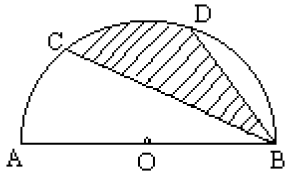


图2—18

6．在图 2－18 中，C、D 是半圆弧 AB 上的两个三等分点（即弧 AC、弧

CD、弧 BD 的长度相等）。已知圆的半径为 6 厘米，求图中阴影部分的面积是多少？（π＝3.14）

7．在图 2－19 中的两个四边形都是正方形，而且外边大正方形的边长为 4 厘米，求图中阴影部分的面积是多少？

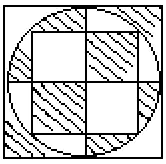


图2—19

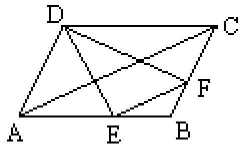


图2—20

8．在图 2－20 中，ABCD 是平行四边形，AC 为对角线，且 EF 平行于 AC，如果三角形 ADE 的面积为 10 平方厘米，那么三角形 CDF 的面积是多少？

9．在图 2－21 中三角形 ABC 的各边上，分别取 AD、BE、CF 各等于 AB、BC、CA 长的三分之一，如果三角形 DEF 的面积为 2 平方厘米，求三角形 ABC 的面积是多少？

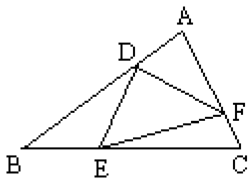


图2—21

第三讲　钉板趣题

一、钉板与皮筋

所谓钉板，就是把钉按一定的要求钉在木板上，这样带有钉的木板叫钉板。钉板与皮筋所讨论的问题是：以钉板上的某些钉为顶点，然后用皮筋将这些顶点依次连起来（以后简称去套这些钉），就可以得出一些不同的多边形来，再计算某种多边形的个数，下面举几个例题来说明一下做这类问题的思路和注意事项。

例 1　用 20 枚铁钉按图 3－1 所示，钉成相邻的横、竖两排距离都相等的 4×5 矩形钉阵，现在给你许许多多的皮筋，以这些钉为顶点，你能套出多少个正方形来。

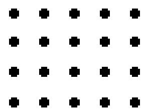


图3—1

分析与解　此题与第一分册中讲到的数正方形个数的问题有些相似。为方便起见，我们假定相邻两行、两列钉之间的距离为“1”，用皮筋去套这些钉，首先可以得到图 3－2 那样的图形。在图 3－2 中，边长为“1”的正方形有（4×3）12 个，边长为“2”的正方形有（3×2）6 个，边长为“3”的正方形有 2 个。除了上面那些正方形外，还有其它的正方形。如果把图 3－1 中某些小正方形相对顶点上的钉用皮筋连起来，便可得图 3－3。在图 3－3 中，因为 AB、BC、CD、DA 都是边长为“1”的正方形的对角线，所以 AB＝BC＝CD＝DA。另外角 A、B、C、D 都正好是两个 45°角的和，故它们都等于 90°，这一来四边形 ABCD 是个正方形。图 3－3 中和 ABCD 一样的正方形有（3×2）＝6 个。

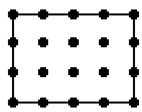


图3—2

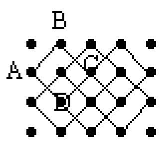


图3—3

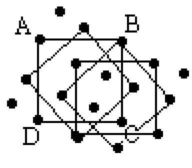


图3—4

另外，如果把某些两个相邻的正方形拼成的长方形相对顶点上的顶点也用皮筋连接起来便得图 3－4。在图 3－4 中，因为 AB、BC、CD、DA 都是相同长方形的对角线，所以 AB＝BC＝CD＝DA。通过图形的拼补可以算出角 A、B、C、D 都等于 90°，因此四边形 ABCD 也是正方形，图 2－4 中和 ABCD 一样的正方形有（2×2）4 个

通过仔细观察，边长比图 3－4 中 AB 线段还长，位置又不太正规的正方形不存在。故共可套出正方形：

4×3＋3×2＋2＋3×2＋2×2＝30（个）

通过例 1 可以发现，解这类所谓“ 钉板与皮筋 ”问题时，分类计算这种想法是很重要的。值得注意的是，在数图 3－3 中正方形个数时，千万不要把 ABCD 内的 2 个正方形那样的小正方形也算进去，因为它们某些顶点上没有钉。

例 2　把 12 个钉钉成图 3－5 所示的那样一个矩形钉阵，相邻两钉间的距离都是 1 厘米。以这些钉为顶点，用皮筋去套，可以得到许许多多的三角形，问这些三角形中，面积为 3 平方厘米的三角形有几个？

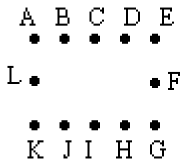


图3—5

分析与解　三角形的面积等于它的底乘以高再除以 2。而图 3－5 中的 AK＝EG＝2 厘米。如果以 2 厘米做三角形的高，当它的面积为 3 平方厘米时，其底边长应为 3 厘米。把底边选在 A、B 所在的直线上，这时线段 AD 和 BE 的长都是 3 厘米，以 AD 为底，K、J、I、H、G 为顶点，可得五个面积为 3 平方厘米的三角形。同样以 BE 为底，K、J、I、H、G 为顶点，又可得到五个面积为 3 平方厘米的三角形。反过来，因为 KH＝JG＝3 厘米，所以，分别以 KH、JG 为底，A、B、C、D、E 为顶点，又可得出 10 个面积为 3 平方厘米的三角形。

图 3－6 所示的三角形 DHL 和 BFJ，它们的底都是 2 厘米，高都是 3 厘米，故面积也是 3 平方厘米。

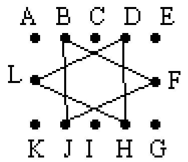


图3—6

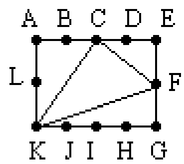


图3—7

除了上面那两类三角形之外，还有满足要求的第三类三角形。我们知道：图 3－5 中矩形 AEGK 的面积为 8 平方厘米，如按图 3－7 所示那样，将矩形 AEGK 分成四个三角形，从图 3－7 中很容易算出直角三角形 ACK、CEF、FGK 的面积分别为 2 平方厘米、1 平方厘米、2 平方厘米，而 8－2－1－2＝3，所以三角形 CFK 的面积为 3 平方厘米。图 3－7 中与三角形 CFK 类似的三角形还有 3 个，它们分别是 CLG、AIF、ELI。故面积为 3 平方厘米的三角形有：

5×2×2＋2＋4＝26（个）

例 3　图 3－8 中的正方形被分成 9 个相同的小正方形。它们一共有 16 个顶点（共同的顶点算一个），以其中不在同一条直线上的三个点为顶点，可以构成三角形。在这些三角形中，与阴影三角形面积相等的有多少个？

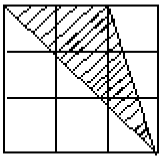


图3—8

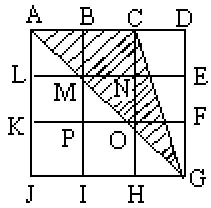


图3—9

分析与解　为方便起见，给图 3－8 的顶点标上字母，得图 3－9 并假定每个小正方形的边长为“1”，这样一来，图 3－8 中阴影三角形的面积为“3”。

图中面积为“3”的三角形，可分为两大类：一类底长为“2”，高是“3”；另一类底长为“3”，高为“2”。

先看底为“2”、高为“3”的三角形有多少个。如果把底边选在 AD 上，而在 AD 上有 AC、BD 两条线段的长为“2”。点 J、I、H、G 到线段 AD 的距离为“3”。所以这时与阴影三角形面积相等的三角形有（4×2）8 个。同样底边还可以选在 DG、GJ、JA 三边上，同底边选在 AD 上一样，每边上都有 8 个三角形与阴影三角形的面积相等。

再看底边长为“3”，高为“2”的三角形有多少个。因为 AD、DG、GJ、JA、LE、KF、BI、CH 的长都是“3”，所以它们都可以被选定作三角形的底边。当以 AD 为底时，K、P、O、F 四点到线段 AD 的距离都为“2”，为了不与第一类中已有的三角形重复，此时只有两个三角形 ADP、ADO 与阴影三角形面积相等。同样，以 DG、GJ、JA 为底时，也都各有两个三角形与阴影三角形面积相等，当以 LE 为底时，J、I、H、G 四点到 LE 的距离都为“2”，为了不与第一类中已有的三角形重复，此时也只有两个三角形 LEH、LEI 与阴影三角形面积相等。同样以 KF、BI、CH 为底时，也都各有两个三角形与阴影三角形面积相等。

因为第一类中有（2×4×4）32 个三角形与阴影三角形面积相等，第二类中有（2×8）16 个三角形与阴影三角形面积相等，所以图 3－8 中有（32＋16）48 个三角形（包括阴影三角形）的面积与阴影三角形面积相等。

二、分类计算

上面提到的分类计算的方法，是数图形的重要方法，下面举例加以说明。

例 4　图 3－10 中到底有多少个三角形？

分析与解　图 3－10 中到底有多少个三角形，我们采用分类的方法进行计算。

和三角形 AFG 一样的三角形还有 4 个，它们分别是三角形 BGH、CHI、DIJ、EJF。这一类三角形共有 5 个。

和三角形 ABG 一样的三角形还有 4 个，它们分别是三角形 BCH、CDI、DEJ、EAF。这一类的三角形也共有 5 个。

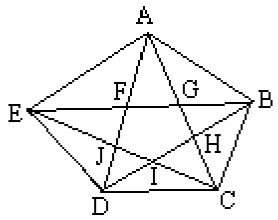


图3—10

和三角形 ABF 一样的三角形还有 9 个，它们分别是三角形 AEG、BAH、BCG、CHD、CBI、DIE、CDJ、DEF、AEJ。这一类三角形共有 10 个。

和三角形 ABE 一样的三角形还有 4 个，它们分别是三角形 ABC、BCD、CDE、DEA。这一类三角形共有 5 个。

和三角形 ACD 一样的三角形还有 4 个，它们分别是三角形 BDE、CAE、DAB、EBC，这一类三角形也共有 5 个。

和三角形 ADH 一样的三角形还有 4 个，它们分别是三角形 ACJ、BDF、CEG、BEI，这一类三角形还是共有 5 个。

求出这六类三角形个数的和，便是结果。所以图 3－10 中共有三角形。

5＋5＋10＋5＋5＋5＝35（个）

例 5　图 3－11 中有多少个三角形？

分析与解　为叙述方便，我们将图 3－11 添上一些字母和标号得图 3－12。先采用过去提到的有关公式计算三角形 ABF、ABE、ACF 中所有三角形的个数。

三角形 ABF 的底边 BF 上共有五个点，所以共有三角形（1＋2＋3＋4）10 个。三角形 ABE、ACF 的底边 BE、FC 上各有四个点，所以各共有三角形（1＋2＋3）6 个。

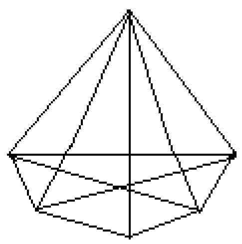


图3—11

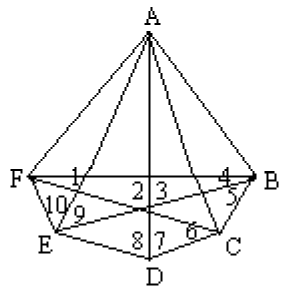


图3—12

在图 3－12 下半部五边形 BCDEF 中，分别用 1 至 10 这十个数给每一单独的小块图形标号，下面按构成三角形的小块图形的个数进行分类计算。

由单独一个小块图形构成的三角形有 8 个，它们分别是三角形 1、4、5、6、7、9、10。

由相邻两个小块图形拼成的三角形有 6 个，它们分别是由 1、2；3、4；4、5；5、6；9、10；10、1 拼成的三角形。

由相邻三个小块图形拼成的三角形不存在。

由相邻四个小块图形拼成的三角形有 3 个，它们分别是由 1、2、3、4；1、2、3、6；2、3、4、9 拼成的三角形。

由相邻五个小块图形拼成的三角形不存在。

由相邻六个小块图形拼成的三角形有 2 个，它们分别是由 1、2、3、4、

5、6；1、2、3、4、9、10 拼成的三角形。

别的三角形没有了。

再看由图 3－12 上、下两部分结合起来形成的三角形，除了上面已讨论过的三角形 ABE、ACF 中所包含的三角形外，还有三角形 AEF、ABC、AED、ACD。

把上面各种情况所得三角形的个数相加，便可求出结果。

所以图 3－11 中共有三角形

10＋6×2＋8＋6＋3＋2＋4＝45（个）。

习题三

1．图 3－13 是由横竖相邻两钉距离都相等的九个钉组成 3×3 正方形钉阵，以这些钉为顶点，用皮筋去套，问能套出多少个三角形和正方形来？

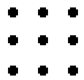


图3—13

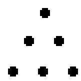


图3—14

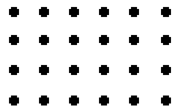


图3—15

2．图 3－14 是由六个钉组成的三角形钉阵。如果每相邻三钉为顶点所围成的正三角形面积都是 1 个面积单位，以这些钉为顶点，你能套出几个面积是 2 个面积单位的三角形来？

3．图 3－15 是相邻横竖两排钉间距离彼此都是相等的 4×6 矩形钉阵，以这些钉为顶点，你能套出多少个正方形来？

4．图 3－16 是由十个钉组成的正三角形钉阵，以这些钉为顶点，你能套出多少个三角形来？

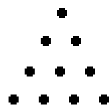


图3—16

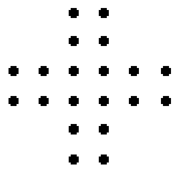
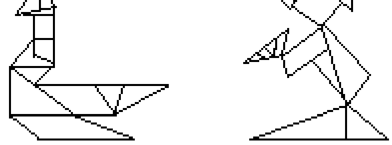


图3—17

5．图 3－17 是一个相邻横竖两排距离都相等的十字钉阵，以这些钉为顶点，你能套出多少个不同的正方形来？

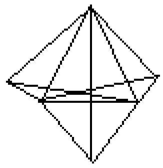
6．数一数图 3－18 中有多少个三角形？



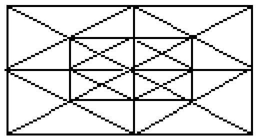
(a) (b)

图3—18

7．数一数图 3－19 中有多少个三角形？



(a)



(b)

图3—19

8．数一数图 3－20 中有多少个三角形？多少个正方形？多少个长方形（包括正方形）？

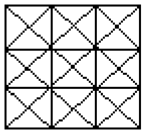


图3—20

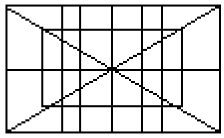


图3—21

9．数一数图 3－21 中有多少个三角形？多少个长方形？10．图 3－22 中有多少个三角形？

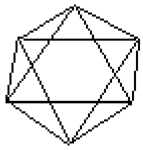


图3—22

第四讲　速算与巧算（二）

这一讲主要介绍内容是：在小学阶段学习乘法定律和商不变性质的基础上进一步灵活运用所学知识，使计算简便。

一、乘法中的速算和巧算

1．直接利用乘法结合律的速算

利用乘法结合律，可以把两个因数相乘积是整十、整百、整千的先进行计算，使计算简便。为了计算迅速，可以把有些较常用的乘法算式记熟，例如：25×4＝100，125×8＝1000，12×5＝60，……

例 1　计算 236×4×25

解：236×4×25

＝236×（4×25）

＝236×100

＝23600

2．乘法交换律、结合律同时运用的速算

几个因数相乘，先交换因数的位置，使因数相乘积为整十、整百、整千的凑在一起，根据结合律分组计算比较简便。

例 2　125×2×8×25×5×4

解：原式＝（125×8）×（25×4）×（5×2）

＝1000×100×10

＝1000000

3．直接利用乘法分配律的简算

例 3　计算：

（1）175×34×175×66

（2）67×12＋67×35＋67×52＋67

解：（1）根据乘法分配律：

原式＝175×（34＋66）

＝175×100

＝17500

（2）把 67 看作 67×1 后，利用乘法分配律简算。

原式＝67×（12＋35＋52＋1）

＝67×100

＝6700

4．把一个因数拆分成两个因数，利用交换律、结合律进行巧算。

例 4　计算（1）28×25

（2）48×125

（3）125×5×32×5

解：（1）原式＝4×7×25

＝7×（4×25）

＝7×100

＝700

（2）原式＝6×8×125＝6×（8×125）

＝6×1000

＝6000

（3）原式＝125×8×4×5×5

＝（125×8）×（4×25）

＝1000×100

＝100000

5．间接利用乘法分配律进行巧算

例 5　计算（1）26×99

（2）1236×199

（3）713×101

解：（1）由 99＝100－1，

原式＝26×（100－1）

＝26×100－26×1

＝2600－26

＝2574

（2）由 199＝200－1，

原式＝1236×（200－1）

＝1236×200－1236×1

＝247200－1236

＝246000－36

＝245964

（3）原式＝713×（100＋1）

＝713×100＋713×1

＝71300＋713

＝72013

6．几种常见的特殊因数乘积的巧算

（1）任何一个自然数乘以 0，其积都等于 0。

例 6　计算 1326＋427×9×42×0－315

解：原式＝1326＋0－315

＝1011

（2）在乘法算式中，任何一个数乘以 1，还得原来的数。

例 7　8736×49＋8736×40－8736×88

解：根据乘法分配律，

原式＝8736×（49＋40－88）

＝8736×1

＝8736

（3）求一个数乘以 5 的积

例 8　计算 12864732×5

解：一个数乘以 5，实际上就是乘以 10 的一半，因此可以把被乘数末尾添上一个 0（扩大 10 倍），再把所得的数除以 2（减半）即可。

原式＝128647320÷2

＝64323660

（4）求一个数乘以 11 的积

例 9　13254638×11

解：把被乘数依次排开，先写上这个数首尾两数字，中间再添上相邻两数之和（够 10 进 1），就是这个数乘以 11 的积。

```
  1 3 2 5 4 6 3 8
 /\/\/\/\/\/\/\/\
1 4 5 7 9 0 9 1 8

1 4 5 8 0 1 0 1 8
```

13254638×11＝145801018

同学们把这种乘以 11 的速算总结成一句话，叫作“两边一拉，中间相加”。

（5）求十几乘以十几的积

例 10　计算 18×12

解：如果两个因数都是十几的数，可以用一个因数加上另一个因数个位上的数，乘以 10，再加上它们个位数的积。

原式＝（18＋2）×10＋2×8

＝200＋16

＝216

二、除法中的速算与巧算

1．利用商不变性质的简便运算

我们已经学过，如果被除数和除数同时乘以或除以相同的数（这个数不等于零），所得的商不变。这就是商不变的性质。根据这个性质，可以使一些除法算式计算简便。

例 11　计算：

（1）12400÷25

（2）374000÷125

解：（1）原式＝（12400×4）÷（25×4）

＝49600÷100

＝496

计算熟练后可直接列式为：原式＝124×4＝496

（2）原式＝（374000×8）÷（125×8）

＝2992000÷1000

＝2992

计算熟练后，可直接列式为：原式＝374×8＝2992

2．连除式题的巧算

我们已经学过乘法交换律。交换因数的位置积不变。在连除式题中也同样可以交换除数的位置，商不变。在连除运算中有这样的性质：

一个数除以另一个数所得的商，再除以第三个数，等于第一个数除以第三个数所得的商，再除以第二个数。用字母表示为：

a÷b÷c＝a÷c÷b

利用这个性质可以使连除运算简便。

例 12　45000÷125÷15

解：原式＝45000÷15÷125

＝3000÷125

＝3×8

＝24

3．连除运算中利用添括号法则的巧算

在连除算式中，一个数除以另一个数所得的商再除以第三个数，等于第一个数除以第二、三两个数的积。即添上括号后，因为括号前面是除号，所以括号中的运算符号要变为乘号。用字母表示为：a÷b÷c＝a÷（b×c）

利用这个法则可以把两个除数相乘。如果积是整十、整百、整千，可以使计算简便。

例 13　计算：

（1）4900÷4÷25

（2）24024÷4÷6

解：（1）原式＝4900÷（4×25）

＝4900÷100

＝49

（2）原式＝24024÷（4×6）

＝24024÷24

＝1001

4．利用乘除混合运算性质的巧算

在乘除混合运算中，可以把乘数、除数带符号“搬家”。也可以“去括号”或“添括号”。当“去的括号”（或“添的括号”）前面是乘号时，则“要去的括号”（或“要添的括号”）内运算符号不变；当“要去的括号”（或“要添的括号”）前面是除号时，则“要去的括号”（或“要添的括号”）内运算符号要改变。原来乘号变为除号，原来的除号变为乘号。用字母表示为：

a×b÷c＝a÷c×b＝a×（b÷c）

a÷b÷c＝a÷（b×c）

a÷b×c＝a÷（b÷c）

利用以上乘除混合运算性质，可以使计算简便。

例 14　计算

（1）150×40÷50

（2）1320×500÷250

（3）72000÷（125×9）

（4）210÷42×6

解：（1）原式＝150÷50×10

＝3×40

＝120

（2）原式＝1320×（500÷250）

＝1320×2

＝2640

（3）原式＝72000÷125÷9

＝（72000÷9）÷125

＝8000÷125

＝8×8＝64

（4）原式＝210÷（42÷6）

＝210÷7

＝30

习题四

1．用简便方法求积：

（1）17×15

（2）21365286×5

（3）142357924×11

2．根据乘法运算定律简算下面各题：

（1）234×25×4

（2）37×2×125×25×5×4×8

（3）125×32×2×25×5

3．巧算下面各式的积：

（1）36×25

（2）84×99

（3）150×299

4．巧算下面各题的商：

（1）42800÷25

（2）2261000÷125

（3）720÷12

第五讲　二进制初步

古时候的原始记数方法是以形示数，如用绳子打结，打结个数表示事物的个数，就是“结绳记数”；在竹片、骨片；瓷片上刻划，就是“刻划记数”。直到有了文字，才开始用字母符号表示数。如罗马数码，Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ表示现在我们熟悉的阿拉伯数码 1、2、3，5 记作Ⅴ，10 记作Ⅹ，100 记作 C，采用“左减右加”原则，Ⅳ表示 4（5 减 1），而Ⅵ表示 6（5 加 1），Ⅸ表示 9，Ⅺ表示 11，XX 表示 20，CCIIIC 表示 203，罗马数码表示数的特点是不管一个数码写在什么位置表示的数是固定的。现在看来这种记数方法很不好，一方面符号太多，另一方面很难作乘除运算。后来产生了“进位制记数法”，用少数几个数码，同一个数码写在一个数的不同数位表示不同的数值，就是“位值制”。

十进位制只用十个数码：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9。如 1993，千位上的 1 表示 1000，百位上的 9 表示 900，十位上的 9 表示 90，个位上的 3 就是 3。

$27548=20000+7000+500+40+8$

$\quad=2\times10^4+7\times10^3+5\times10^2+4\times10+8$

一般，十进位数$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}$（$a_0$，$a_1$，$a_2$……分别表示个位、十位、百位、……数字），它表示的数如下：

$\overline{a_{na_{n-1}}\cdots a_2a_1a_2}$

$=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_1\times10+a_0$。

除十进制外还有二进制，三进制，八进制等。这里介绍一下二进制。

一、什么是二进制

在现实生活和记数器中，如果表示数的“器件”只有两种状态，如电灯的“亮”与“灭”，开关的“开”与“关”。一种状态表示数码 0，另一种状态表示数码 1，1 加 1 应该等于 2，因为没有数码 2，只能向上一个数位进一，就是采用“满二进一”的原则，这和十进制是采用“满十进一”原则完全相同。

1＋1＝10，10＋1＝11，11＋1＝100，100＋1＝101，

101＋1＝110，110＋1＝111，111＋1＋＝1000，……，

可见二进制的 10 表示二，100 表示四，1000 表示八，10000 表示十六，……。

二进制同样是“位值制”。同一个数码 1，在不同数位上表示的数值是不同的。如 11111，从右往左数，第一位的 1 就是一，第二位的 1 表示二，第三位的 1 表示四，第四位的 1 表示八，第五位的 1 表示十六。用大家熟悉的十进制说明这个二进制数的含意，有以下关系式

$(11111)_{(二进制)}=1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2+1_{(十进制)}$

一个二进制整数，从右边第一位起，各位的计数单位分别是 1，2，2^2，2^3，…，2^n，…。

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{(n-2)} \cdots a_1 a_0}_{(\text{二进制})} = a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \cdots + a_1 \times 2 + a_0{}_{(\text{十进制})}$$

二、二进制的四则运算

二进制四则运算和十进制四则运算原理相同，所不同的是十进制有十个数码，“满十进一”，二进制只有两个数码 0 和 1，“满二进一”。二进制运算口诀则更为简单。

1．加法

二进制加法，在同一数位上只有四种情况：

0＋0＝0，0＋1＝1，1＋0＝1，1＋1＝10。

只要按从低位到高位依次运算，“满二进一”，就能很容易地完成加法运算。

例 1　二进制加法

（1）10110＋1101；

（2）1110＋101011。

解　加法算式和十进制加法一样，把右边第一位对齐，依次相应数位对齐，每个数位满二向上一位进一。

$$\begin{array}{lr} (1) & 10110 \\ +) & 1101 \\ \hline & 100011 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} (2) & 1110 \\ +) & 101011 \\ \hline & 111001 \end{array}$$

10110＋1101＝100011　　　　　1110＋101011＝111001

通过计算不难验证，二进制加法也满足“交换律”，如 101＋1101＝1101＋101＝10010。

多个数相加，先把前两个数相加，再把所得结果依次与下 一个加数相加。

例 2　二进制加法

（1）101＋1101＋1110；

（2）101＋（1101＋1110）。

解

（1）101＋1101＋1110　　　　（2）101＋（1101＋1110）

＝10010＋1110　　　　　　　＝101＋11011

＝100000；　　　　　　　　＝100000

从例 2 的计算结果可以看出二进制加法也满足“结合律”。

巩固练习　二进制加法

（1）1001＋11；

（2）1001＋101101；

（3）（1101＋110）＋110；

（4）（10101＋110）＋1101。

2．减法

二进制减法也和十进制减法类似，先把数位对齐，同一数位不够减时，从高一位借位，“借一当二”。

例 3　二进制减法

（1）11010－11110；

（2）10001－1011。

解（1）110101－11110＝10111；

（2）10001－1011＝110。

$$
\begin{array}{lr}
(1) & 110101 \\
-) & 11110 \\
\hline
 & 10111
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lr}
(2) & 10001 \\
-) & 1011 \\
\hline
 & 110
\end{array}
$$

例 4　二进制加减混合运算

（1）110101＋1101－11111；

（2）101101－11011＋11011。

解（1）110101＋1101－11111

＝1000010－11111

＝100011

（2）101101－11011＋11011

＝10011＋11011

＝101101。

巩固练习　二进制运算

（1）11010－1101；

（2）11001－111；

（3）110101－1111＋101；

（4）1001＋1110－10011。

3．乘法

二进制只有两个数码 0 和 1，乘法口诀只有以下几条：

0×0＝0，0×1＝0，1×0＝0，1×1＝1

概括成口诀：零零得零，一零得零，一一得一。

二进制乘法算式和十进制写法也一样。

例 5　二进制乘法

（1）1001×101；

（2）11001×1010。

解

（1）1011×101＝110111；（2）11001×1010＝11111010。

$$
\begin{array}{lr}
 & 1011 \\
\times) & 101 \\
\hline
 & 1011 \\
 & 1011 \\
\hline
 & 110111
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lr}
 & 11001 \\
\times) & 1010 \\
\hline
 & 110010 \\
 & 11001 \\
\hline
 & 11111010
\end{array}
$$

例 6　二进制运算

（1）101×1101；

（2）1101×101；

（3）（101＋11）×1010；

（4）101×1010＋11×1010。

解（1）　　　　　　　　　　　　（2）

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times)\ 1101 \\ \hline 101 \\ 101 \\ 101 \\ \hline 1000001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1101 \\ \times)\ 101 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ \hline 1000001 \end{array}$$

101×1101＝1000001；　　　　1101×101＝1000001；

（3）

$$\begin{array}{r} 101 \\ +)\ 11 \\ \hline 1000 \\ \times)\ 1010 \\ \hline 10000 \\ 10000 \\ \hline 1010000 \end{array}$$

（101＋11）×1010＝1010000；

（4）

$$\begin{array}{r} 101 \\ +)\ 1010 \\ \hline 1010 \\ 101 \\ \hline 110010 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101 \\ \times)\ 1010 \\ \hline 110 \\ 11 \\ \hline 11110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 110010 \\ +)\ 11110 \\ \hline 1010000 \end{array}$$

101×1010＋11×1010＝1010000

从例 6 的计算结果可以看出，二进制乘法满足“交换律”；乘法对加法也满足“分配律”。对这一结论，大家还可以进行多次验证。

巩固练习　二进制运算

（1）1011×1101；

（2）11101×1001；

（3）10101×（111＋101）；

（4）（11001－1111）×101

4．除法

除法是乘法的逆运算，二进制除法和十进制除法也一样，而且更简单，每一位商数不是 0，就是 1。

例 7　二进制除法

（1）10100010÷1001；

（2）10010011÷111。

解　（1）　　　　　　　　　　（2）

$$\begin{array}{r} 10010 \\ 1001\overline{)10100010} \\ 1001 \\ \hline 1001 \\ 1001 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10101 \\ 111\overline{)10010011} \\ 111 \\ \hline 1000 \\ 111 \\ \hline 0 \end{array}$$

10100010÷1001＝10010；　　　10010011÷111＝10101。

例 8　求二进制除法的商数和余数

111010÷101

解

```
        1011
101√111010
     101
    ------
     1001
      101
    ------
      1000
       101
    ------
        11
```

111010÷101　所得商数是 1011，余数是 11。

巩固练习　二进制除法

（1）1101110÷101；

（2）1010110001÷1101；

（3）求商数和余数

1101001÷1001

在二进制除法中，被除数，除数，商数和余数的关系和十进制除法的关系是相同的。

被除数＝除数×商数＋余数。

如例 8，111010＝101×1011＋11。

三、二进制与十进制的互化

通常情况下，一个数不加说明，它是十进制数，而非十进制数，就应加以说明。一个二进制数 1011 表示成 $1011_{(2)}$（在右下角注明进位制），为了强调说明一个数是十进制，也可以用同样方法注明，如十进制数 135，表示为 $135_{(10)}$。

1．二进制数化十进制数

二进制的意义已经知道：

$a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots\cdots a_2a_1a_{0\,(2)}=a_n\times 2^n+a_{n-1}\times 2^{n-1}\times a_{n-2}\times 2^{n-2}+\cdots+a_2\times 2^2+a_1\times 2+a_0$。

利用这一关系就很容易把二进制数化为十进制数。

例 9　把二进制数化为十进制数

（1）$110101_{(2)}$；

（2）$1011001_{(2)}$。

解　（1）$110101_{(2)}=1\times 2^5+1\times 2^4+1\times 2^2+1$

$=32+16+4+1$

$=53$。

（2）$1011001_{(2)}=1\times 2^6+1\times 2^4+1\times 2^3+1$

$=64+16+8+1$

$=89$。

巩固练习　把下列二进制数化成十进制数

（1）$111011_{(2)}$　　（2）$1011010_{(2)}$

（3）1011011 $_{(2)}$　　　　（4）11010100

2．十进制数化二进制数

从一个简单数分析：

$$21_{(10)}=\overline{a_4a_3a_2a_1a_0}_{(2)}=a_4\times2^4+a_3\times2^3+a_2\times2^2+a_1\times2+a_0$$

$$=(a_4\times2^3+a_3\times2^2+a_2\times2+a_1)\times2+a_0$$

从以上表示式可见 a_0 是 21 $_{(10)}$ 除以 2 所得余数，21 $_{(10)}$ $=2\times10+1$，$a_0=1$，

$a_4\times2^3+a_3\times2^2+a_2\times2+a_1=10$

$(a_4\times2^2+a_3\times2+a_2)\times2+a_1=10$

a_1 是 10 除以 2 所得余数，

$10=2\times5+0$，$a_1=0$，

按这样道理，就可以依次求出 a_0，a_1，a_2，a_3，a_4。用以下形式演算：

```
2|21……1
 2|10……0
  2|5……1
   2|2……0
      1
```

$a_0=1$，$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=0$，$a_4=1$。

21 $_{(10)}$ ＝10101 $_{(2)}$

例 10　把下列十进制数化为二进制数

（1）139 $_{(10)}$　　（2）312 $_{(10)}$　　（3）477 $_{(10)}$

解　（1）　　　　（2）　　　　（3）

```
2|139…1        2|312…0        2|477…1
 2|69…1         2|156…0        2|238…0
  2|34…0         2|78…0         2|119…1
   2|17…1         2|39…1         2|59…1
    2|8…0          2|18…1         2|29…1
     2|4…0          2|9…1          2|14…0
      2|2…0          2|4…0          2|7…1
         1            2|2…0          2|3…1
                         1              1
```

139 $_{(10)}$ ＝10001011 $_{(2)}$

312 $_{(10)}$ ＝100111000 $_{(2)}$

477 $_{(10)}$ ＝111011101 $_{(2)}$

巩固练习　把下列十进制数化为二进制数

（1）193 $_{(10)}$　　　（2）231 $_{(10)}$

（3）269 $_{(10)}$　　　（4）437 $_{(10)}$

四、二进制的简单应用

二进制在计算机中有广泛的应用。这里略举几例，说明二进制的应用。

例 11　现有 1 克，2 克，4 克，8 克，16 克的砝码和各一枚，问在天秤上能称多少种不同重量的物体？

解　用枚举法可以讨论此题。

1，2，1＋2＝3，4，1＋4＝5，2＋4＝6，1＋2＋4＝7，……，1＋2＋4＋……＋16＝31。可以称 1～31 克共 31 种不同重量的物体（只能是整克数）。

用二进制研究此问题，更简便。砝码的克数正好是二进制的各数位的单位：1，2，2^2，2^3，2^4。用它们表示的最大数是 $11111_{(2)}=2^4+2^3+2^2+2+1=31$ 而 $11111_{(2)}=100000_{(2)}-1=2^5-1=31$。不大于 31 的所有自然数都可以表示。

思考　用 1 克，2 克，4 克，8 克，16 克，32 克，64 克在天秤上可称哪些重物？

例 12　说明 $2^{300}-1$ 能被 7 整除。

证明　$2^{300}-1=1\underbrace{00\cdots0}_{300个0}{}_{(2)}-1=\underbrace{11\cdots1}_{300个1}{}_{(2)}$，

$7=8-1=2^3-1=1000_{(2)}-1=111_{(2)}$；

$300\div3=100$

$\underbrace{1111\cdots1}_{300个1}\div111=\underbrace{1001001\cdots001}_{100个1}$

所以 $2^{300}-1$ 能被 7 整除。

此题也可以用下面方法证明：$2\equiv2\ (\mathrm{mod}7)$

$2^2\equiv4\ (\mathrm{mod}7)$

$2^3\equiv1\ (\mathrm{mod}7)$

$2^{300}=(2^3)^{100}\equiv1^{100}\equiv1\ (\mathrm{mod}7)$

$2^{300}-1\equiv0\ (\mathrm{mod}7)$。

习题五

1．把下列二进制数化成十进制数

（1）$101001_{(2)}$

（2）$1101110_{(2)}$

（3）$10011101_{(2)}$

（4）$10101000_{(2)}$

2．把下列十进制数化为二进制数

（1）317；　（2）509。

3．加法

（1）$11101_{(2)}+10011_{(2)}$；

（2）$10011_{(2)}+11110101_{(2)}$。

4．减法

（1）$111011_{(2)}-101101_{(2)}$；

（2）$1001101_{(2)}-10011_{(2)}$

5．乘法

（1）$10011_{(2)}\times 1101_{(2)}$；

（2）$110101_{(2)}\times 1011_{(2)}$。

6．除法

（1）$10001111_{(2)}\div 1101_{(2)}$；

（2）$11100111_{(2)}\div 10101_{(2)}$；

7．计算

（1）$11011_{(2)}\times(101_{(2)}+11_{(2)})$；

（2）$(10010010_{(2)}+1101101_{(2)})\div 101_{(2)}$。

8．现有 1 分，2 分，4 分，8 分邮票各一张，从中取出若干张，能组成多少种不同值？

9．*　把下列三进制数化为十进制数

（1）$2102_{(3)}$；　（2）$201120_{(3)}$。

10．下面是一个二进制除法算式，请写出被除数。

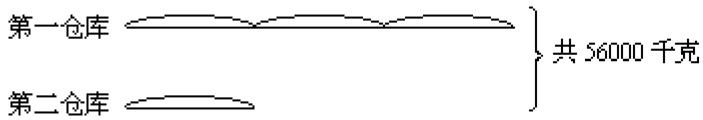
```
              * * *
* * * ) * * * * * * *
          * * * *
      -----------------
              * * * *
              * * * *
          -------------
                  * 0
```

第六讲　应用问题（三）

和倍、差倍与和差问题的解题方法

和倍、差倍与和差问题，是根据这几类题目的已知条件而取的名称。和倍问题是已知两个数的和及它们之间的倍数关系而求这两个数各是多少的应用题；差倍问题是已知两个数的差及它们之间的倍数关系而求这两个数各是多少的应用题；和差问题是已知两个数的和及这两个数的差而求这两个数各是多少的应用题。有时，题目的条件可能适当变化，不局限于两个数，可能是三个数或更多一些的数。

例 1　秋收之后，红星农场把 56000 千克粮食分别存入两个仓库，已知往第一仓库里存放的粮食是第二仓库的 3 倍。求两个仓库各存粮食多少千克？



分析：我们可以把容量较小的第二仓库存放的粮食数看作是 1 份，那么第一仓库的存粮数就是 3 份，两个仓库存粮总数 56000 千克就相当于第二仓库存粮数的 4 份那么多，于是，第二仓库存粮数即可求得。

（1）第二仓库存粮数。

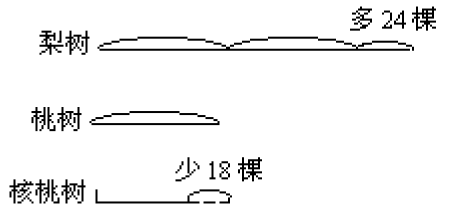
56000÷（3＋1）＝14000（千克）

（2）第一仓库存粮数。

14000×3＝42000（千克）

答：第一仓库存粮 42000 千克，第二仓库存粮 14000 千克。

例 2　果园里有梨树、桃树、核桃树共 526 棵。梨树比桃树的 2 倍多 24 棵，核桃树比桃树少 18 棵。求梨树、桃树及核桃树各有多少棵？



分析：已知条件告诉我们，梨树比桃树的 2 倍多 24 棵，核桃树比桃树少 18 棵，都是同桃树相比较，可见，以桃树的棵数为标准，也就是把桃树的棵数看作为 1 份的话，是便于解答的。又知三种树的总数是 526 棵，如果给核桃树增加 18 棵，那么就和桃树相等了；再从梨树里减少 24 棵，那么就相当于桃树的 2 倍了。如果这样做的话，总棵数就变成（526＋18－24＝）520 棵了，恰好相当于桃树棵数的 4 倍。

（1）桃树的棵数。

（526＋18－24）÷（2＋1＋1）。

＝520÷4

＝130（棵）

（2）梨树的棵数。

130×2＋24＝284（棵）

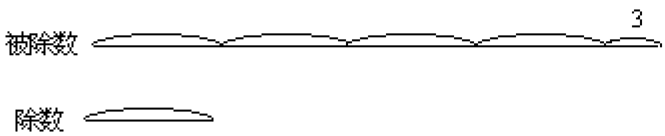
（3）核桃树的棵数。

130－18＝112（棵）

答：梨树、桃树及核桃树分别为 284 棵、130 棵及 112 棵

例 3　被除数除以除数商 4 余 3。而被除数、除数、商及余数的和是 155。求被除数、除数各是多少？

分析：根据这道题和条件，可以分两层去思考。第一层是被除数除以除数商 4 余 3，也就是说，被除数相当于除数的 4 倍还多 3。假如能够知道被除数与除数的和，再根据它们的倍数关系，问题就可以解答了。第二层是被除数、除数、商及余数的和是 155，从 155 里减去商 4 及余数 3，剩下的数就是被除数及除数的和。



（1）被除数及除数的和是多少？

155－4－3＝148

（2）除数是多少？

（148－3）÷（4＋1）

＝145÷5＝29

（3）被除数是多少？

29×4＋3＝119

答：被除数是 119，除数是 29。

例 4　四（1）班与四（2）班原有图书的本数一样多。后来，四（1）班又买来新书 118 本，四（2）班从本班原有书中取出 70 本送给一年级同学。这时，四（1）班的图书是四（2）班的 3 倍。求两班原有图书各多少本？

分析：两个班原有图书的本数一样多，后来书的本数有了一些变化，于是四（1）班的图书是四（2）班的 3 倍。两个班的图书本数是怎样变化的呢？四（1）班又买来新书 118 本，增加了；四（2）班从本班原有书中取出 70 本送给一年级同学，减少了。一个班增加了，另一个班减少了，这样，两个班就相差（118＋70＝）188 本，也就是四（1）班比四（2）班多了 188 本。又知，这时四（1）班的图书是四（2）班图书的 3 倍，可见，这 188 本图书就相当于四（2）班所剩图书的（3－1＝）2 倍。四（2）班所剩图书的本数就可以求出来了。随之，原有图书的本数也可以求出来了。

（1）后来，四（1）班比四（2）班多多少本书？

118＋70＝188（本）

（2）四（2）班剩下的图书是多少本？

188÷（3－1）＝188÷2＝94（本）

（3）四（2）班原有图书多少本？

94＋70＝164（本）（两个班原有图书一样多）

综合算式：

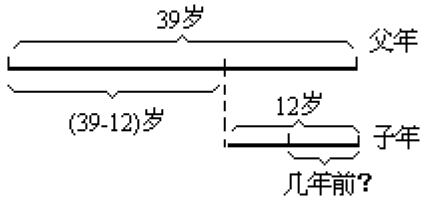
（118＋70）÷（3－1）＋70

＝188÷2＋70

＝164（本）

答：两个班原来各有图书 164 本。

例 5　父亲现年 39 岁，儿子现年 12 岁。问几年以前，父亲的年龄是儿子的 4 倍？



父亲现年 39 岁，儿子现年 12 岁，相差 27 岁。这个差是不变的。就是说，几年以后，仍然相差 27 岁，而几年以前呢，也相差 27 岁，这是大家都应该知道的生活常识。题目问的是“几年以前，父亲的年龄是儿子的 4 倍？”当父亲的年龄恰好是儿子年龄的 4 倍时，父亲的年龄仍然比儿子大 27 岁，这 27 岁应是儿子年龄的（4－1）倍。因此，当父年恰好是子年 4 倍的时候，儿子的年龄可以求得。

（1）父亲比儿子大多少岁？

39－12＝27（岁）

（2）父亲的年龄是儿子年龄的 4 倍时，儿子的年岁是多少？

27÷（4－1）＝9（岁）

（3）几年以前，父亲的年龄是儿子年龄的 4 倍？

12－9＝3（年）

综合算式：

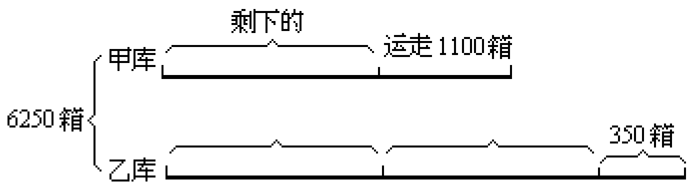
12－（39－12）÷（4－1）

＝12－27÷3

＝3（年）

答：3 年以前，父亲的年龄是儿子的 4 倍。

例 6　甲、乙两个冷藏库共存鸡蛋 6250 箱，先从甲库运走 1100 箱后，这时乙库存的鸡蛋比甲库剩下的 2 倍还多 350 箱。求甲、乙两库原来各存鸡蛋多少箱？



从甲库运走鸡蛋 1100 箱后，则乙库存的鸡蛋比甲库剩下的 2 倍还多 350 箱，按照这样的数量关系，我们可以把甲库剩下的鸡蛋看作是 1 份的量，则乙库所存的鸡蛋就相当于 2 份的量还多 350 箱。先求出“1 份”的量，再求两库原来各存鸡蛋的数量。

已知从甲库先运走 1100 箱，这时两库所存鸡蛋的总数就减少了 1100 箱，还剩下（6250－1100＝）5150 箱。那么，这道题可以说成是：“两数的和是 5150，较大的数比较小的数的 2 倍多 350，求两个数各是多少？”

（1）甲库剩下的鸡蛋还有多少箱？

（6250－1100－350）÷（2＋1）

＝4800÷3

＝1600（箱）

（2）甲库原存鸡蛋多少箱？

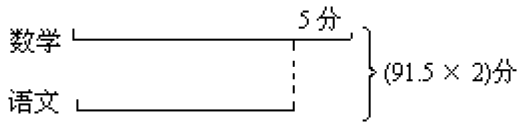
1600＋1100＝2700（箱）

（3）乙库原来存鸡蛋多少箱？

1600×2＋350＝3550（箱）

答：甲库原存鸡蛋 2700 箱，乙库原存鸡蛋 3550 箱。

例 7　一个小学生在期末考试时,语文、数学两门功课的成绩平均是 91.5 分，又知数学成绩比语文多 5 分。求这两门功课的成绩各多少分？



已知两门功课的平均分是 91.5 分，可以求出这两门功课的总分数是（91.5×2＝）183 分。又知数学成绩比语文多 5 分，可以根据这两门功课的和与差求出这两个数来。如果从总分数里把数学比语文多的分数先减去，也就是从总分数里减去 5 分，剩下的就是语文分数的 2 倍，于是，语文的分数即可求得。

（1）数学、语文的分数共多少？

91.5×2＝183（分）

（2）语文成绩是多少分？

（183－5）÷2＝89（分）

（3）数学成绩是多少分？

89＋5＝94（分）

或者：183－89＝94（分）

答：语文成绩是 89 分，数学成绩是 94 分。

解题思路二：

已知数学比语文多 5 分，假定给语文加上 5 分，这样，两门功课的成绩就一般多了。如果真给语文加上 5 分，那么两门功课的总分就是（91.5×2＋5＝）188 分。

这 188 分就相当于数学成绩的 2 倍了。于是，数学的成绩即可求得。

（1）数学成绩是多少分？

（91.5×2＋5）÷2＝188÷2＝94（分）

（2）语文成绩是多少分？

94－5＝89（分）

答：（同上）。

解题思路三：

已知“两门功课的成绩平均是 91.5 分”，我们按照“移多补少”的规律进行分析。又知“数学成绩比语文多 5 分”，把这 5 分平均分为两份，每一份是 2.5 分，从数学成绩里拿出 2.5 分给语文，语文的成绩就是 91.5 分了。而数学呢，拿走 2.5 分，剩下 91.5 分，这就形成了两门成绩的平均数。懂得了这样的关系，两门成绩各是多少就可以求出来了。

（1）为了使两科分数一般多，应该从数学分数里拿出多少分给语文？

5÷2＝2.5 分

（2）数学成绩是多少？

91.5＋2.5＝94（分）

（3）语文成绩是多少？

91.5－2.5＝89（分）

答：（同上）

习题六

1．甲水池有水 5200 立方米，乙水池有水 2400 立方米。如果甲水池里的水以每分钟 44 立方米的速度流入乙水池，那么多少分钟后，乙水池中的水是甲水池的 3 倍？

2．把 1296 分为甲、乙、丙、丁四个数，如果甲数加上 2，乙数减去 2，丙数乘以 2，丁数除以 2 之后，则四个数相等。求这四个数各是多少？

3．柳树洼村原有水田 510 亩，旱田 230 亩，今冬明春计划把一部分旱田改为水田，使全村水田的亩数相当于旱田的 3 倍，求要把多少亩旱田改成水田？

4．甲、乙两城相距 135 千米，小张于上午 7 时骑自行车从甲城出发去乙城，小李于上午 8 时骑摩托车从乙城出发去甲城。张、李二人于上午 10 时在途中相遇。如果摩托车的速度是自行车速度的 3 倍，那么摩托车和自行车的速度各是每小时多少千米？

5．甲、乙两数的和是 80。甲数的 5 倍与乙数的 3 倍的和是 314。求甲、乙二数各是多少？

6．哥哥与弟弟对话说年龄。哥哥对弟弟说：“当我是你今年的岁数那一年，你刚刚 4 岁。”弟弟对哥哥说：“当我长到你今年的岁数时，你就是 19 岁了。”求哥哥、弟弟今年各几岁？

7．甲、乙两个粮仓共存黄豆 84500 千克，从用仓取出 6500 千克，从乙仓取出 4000 千克后，两仓余下的黄豆恰好相等。求甲、乙两仓原来各存黄豆多少千克？

8．一批石油，如果用甲种油罐车装运，需要 20 辆，如果用乙种油罐车装运，需要 25 辆。已知甲种油罐车比乙种油罐车每辆多装 2 吨。求这批石油共多少吨？

9．把 161 分为两个数，使两个数的和是两数之差的 7 倍，求这两个数各是多少？

10．某工厂有两堆煤，第一堆比第二堆多 50 吨，两堆煤各用去 75 吨后，剩下的第一堆煤是第二堆煤的 3 倍。求两堆煤原来各有多少吨？

第七讲　应用问题（四）

列简易方程解应用问题

1．解简易方程的方法

在小学数学教材里，简易方程可分为下面两种情况。

（1）只需一步运算解答的简易方程

①求未知的加数

解法：从和中减去已知的加数。

例　解方程 x＋36＝97

解：97 是两个数之和，36 是已知的加数。所以

$$x+36=97$$
$$x=97-36$$
$$x=61$$

②求未知的被减数

解法：把差加上已知的减数。

例　解方程 x－55＝48

解：48 是差，55 是减数。所以

$$x-55=48$$
$$x=48+55$$
$$x=103$$

③求未知的减数解法：从被减数中减去差。

例　解方程 200－x＝95

解：200 是被减数，而 95 是差。所以

$$200-x=95$$
$$x=200-95$$
$$x=105$$

④求未知的因数

解法：把积除以已知的因数。

例　解方程 7x＝91

解　91 是积，7 是已知的因数。所以

$$7x=91$$
$$x=91\div 7$$
$$x=13$$

⑤求未知的被除数

解法：把商乘以除数。

例　解方程 x÷29＝75

解：75 是商，而 29 是除数。所以

$$x\div 29=75$$
$$x=75\times 29$$
$$x=2175$$

③求未知的除数

解法：把被除数除以商。

例　解方程 432÷x＝27

解：432 是被除数，而 27 是商。所以

$432\div x=27$

$x=432\div 27$

$x=16$

（2）需要两、三步运算解答的简易方程

需要两、三步运算解答的简易方程，解法通常有下列几种。

①先把积看成一个数进行运算

例 1　解方程 $5x+35=80$

解：$5x+35=80$（先把 5x 看成一个加数）

$5x=80-35$

$5x=45$

$x=9$

例 2　解方程 $6x\div 10=9$

解：$6x\div 10=9$（先把 6x 看成一个被除数）

$6x=9\times 10$

$6x=90$

$x=15$

②合并同类项

例 1　解方程 $8.7x+6.3x=7.5$

解：$8.7x+6.3x=7.5$（先计算 $8.7x+6.3x$）

$15x=7.5$

$x=0.5$

例 2　解方程 $48x-13x=105$

$35x=105$

$x=3$

③去括号或者把括号里的数看成一个数

例　解方程 $23(8+x)=345$

解法一：$23(8+x)=345$（去括号）

$23\times 8+23x=345$（先计算 23×8）

$184+23x=345$（把 23x 看成一个数）

$23x=345-184$

$23x=161$

$x=161\div 23$

$x=7$

解法二：$23(8+x)=345$（把 $8+x$ 看成一个因数）

$8+x=345\div 23$

$8+x=15$

$x=15-8$

$x=7$

2．找等量关系和列方程

在解应用题时，常常先找出应用题中数量间的相等关系，也就是通常所说的等量关系，然后列方程求解。

（1）只含有三个数量的简单应用题的等量关系和方程

只含有三个数量的简单应用题，已知两个数量，求第三个数量。这类应

用题的等量关系比较明显，容易找出。根据三个量间的等量关系，往往可以列出三个等式。在这三个等式里，可选择一个等式作为解答该题的方程。习惯上把未知的数量放在等号左边，用字母 x 表示。

例 1　水果商店运来苹果和香蕉共重 96 千克，其中苹果 54 千克，求运来香蕉多少千克？

根据这道题的三个量的关系可以列出以下三个等式：

①苹果 54 千克＋香蕉重量＝共重 96 千克

②共重 96 千克－香蕉重量＝苹果 54 千克

③共重 96 千克－苹果 54 千克＝香蕉重量

如果把未知数量用 x 表示，并把它放在等号的左边，可列出方程

$$54+x=96$$

或者，$96-x=54$

由于题目中说的是“苹果和香蕉共重 96 千克”，所以列出的方程以“$54+x=96$”为好。

例 2　小侠的身高是 165 厘米，比小勇高 20 厘米。小勇的身高是多少厘米？

根据这道题的三个量的关系可以列出以下三个等式。

①小侠身高 165 厘米－20 厘米＝小勇身高

②小侠身高 165 厘米－小勇身高＝20 厘米

③小勇身高＋20 厘米＝小侠身高 165 厘米

如果把未知数量用 x 表示，根据题目里所说的“小侠的身高是 165 厘米，比小勇高 20 厘米”，可列出方程

$$165-x=20$$

或者，$x+20=165$

以上两道例题的等量关系是根据题意找出来的。而有些题目的等量关系就是常用的数量关系。

例 3　汽车每小时行驶 45 千米，几小时可以行驶 157.5 千米？

根据速度、时间与路程三个量之间的数量关系，可以写出下面三个等式：

①每小时 45 千米×时间＝路程 157.5 千米

②路程 157.5 千米÷每小时 45 千米＝时间

③路程 157.5 千米÷时间＝每小时 45 千米

我们设 x 小时走完全程，根据题意可以列出方程

$$45x=157.5$$

或者，$157.5\div x=45$

有关计算面积、体积的题目的等量关系，就利用面积、体积的计算公式。

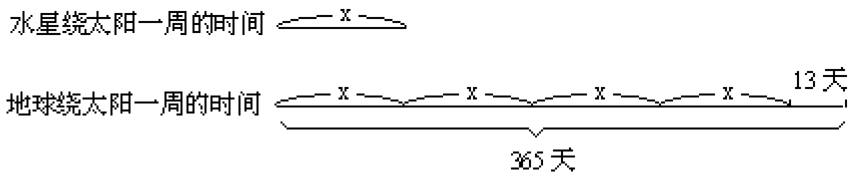
总之，在找等量关系和列方程时，主要是以应用题的数量关系为基础，根据四则运算的意义列成等式。但是，方程解法与算术解法在解题思路上是不同的。算术解法，为了求出未知数，需要把已知数集中起来加以分析，找出未知数与已知数之间的关系，利用已知数与运算符号组成算式，通过计算求出未知数。而列方程解应用题呢，可以用字母表示未知数，例如 x、y 等，让未知数 x 和已知数处于同样地位，按照题目中三个数量的等量关系直接参加列式运算。有些在算术中需要“逆解”的题目，用方程解法往往比较容易。

（2）含有三个数量以上的应用题的等量关系和方程

遇到含有三个数量以上的应用题，要认真审查题意，理解题目所说的是

怎么一回事，才能分析出已知数量同未知数量间的关系，列出方程。

例 1　地球绕太阳转一周要用 365 天，比水星绕太阳一周用的时间的 4 倍多 13 天。水星绕太阳一周要用多少天？



由于列方程解应用题可以让未知数 x 和已知数处于同样地位，直接参加列式运算，我们把题目中叙述的条件适当变换一下说法。这道题可以说成：水星绕太阳一周所需时间 x 的 4 倍再加 13 天就等于 365 天。这样，可列出下面的方程

$$4x+13=365$$

这道题也可以说成：365 天减去水星绕太阳一周所需时间 x 的 4 倍等于 13 天。这样，可列出下面的方程

$$365-4x=13$$

这道题还可以说成：365 天减去 13 天就跟水星绕太阳一周所需时间 x 的 4 倍相等。我们把未知数 x 写在等号左边，可列得方程

$$4x=365-13$$

以上举出的三个不同形式的方程，都是解答这道应用题的方程，在解答这道题时，列出哪一个都可以。

例 2　买 2 张桌子和 6 把椅子共用去 244 元。已知每把椅子的价钱是 24 元，每张桌子的价钱是多少元？

这道题，如果按照算术方法去解，是“逆解”的题目；如果利用方程方法去解，根据题目里的已知条件，就比较容易找出等量关系——2 张桌子的价钱加上 6 把椅子的价钱等于 244 元。

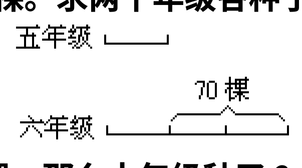
$\boxed{\text{2张桌子的价钱}}+\boxed{\text{6把椅子的价钱}}=244$ 元

已知每把椅子的价钱是 24 元，如果设每张桌子的价钱为 x 元，那么可列出方程

$$2x+24\times6=244$$

3．列方程解应用题举例

例 1　同学们种向日葵，六年级种的棵数是五年级种的棵数的 3 倍，又知六年级比五年级多种 70 棵。求两个年级各种了多少棵？



解：设五年级种了 x 棵，那么六年级种了 3x 棵。根据题意列方程，得

$3x-x=70$

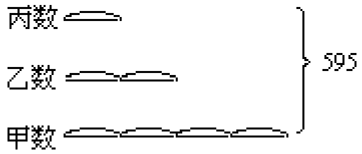
$2x=70$

$x=35$（五年级种的棵数）

$3x=3\times35=105$（六年级种的棵数）

答：五年级种了 35 棵，六年级种了 105 棵。

例 2　甲、乙、丙三个数的和是 595。甲数是乙数的 2 倍，乙数是丙数的 2 倍。求甲、乙、丙三个数各是多少？



解：设丙数为 x，那么乙数为 2x，甲数为 4x。根据题意列方程，得

x＋2x＋4x＝595

7x＝595

x＝85（丙）

2x＝2×85＝170（乙）

4x＝4×85＝340（甲）

答：甲数是 340，乙数是 170，丙数是 85。

解这道题时，假如设甲数为 x，那么乙数就是 $\frac{x}{2}$，丙数就是 $\frac{x}{4}$，列出方程为

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=595$$

解这个方程不如把可以作为 1 份的数（在这道题里是比较小的数）设为“x”比较好。因为设丙数为 x，那么乙数为 2x，甲数为 4x，甲数和乙数都是丙数的整数倍，计算时比较简便。

例 3　修一条路，原计划每天修 90 米，35 天可以修完。实际每天比原计划多修 15 米，照这样计算，可以提前几天修完？

解：设实际用 x 天修完。根据题意列出方程，得

（90＋15）x＝90×35

105x＝3150

x＝30

35－30＝5（天）

答：可以提前 5 天完成。

在解答这道题时，设 x 表示实际用的天数，没有按照题目的“问题”，设 x 表示提前的天数。为什么没有设“x”表示提前的天数呢，如果这样设 x 的话，那么“实际用的天数”就得用（35－x）来表示。于是，所列方程将是如下形式：

（90＋15）×（35－x）＝90×35

解这个方程，比解例题所列的方程麻烦得多。因此，为了使所列的方程简便些，应考虑好怎样设 x。通常把例 3 设 x 的方法叫做“间接设元”。而例 1 和例 2，是根据题目的“问题”设 x 的。也就是说，要求的是什么，就把所求的未知数设为“x”，通常把这种设 x 的方法叫做“直接设元”。

习题七

用方程解答下列各题。

1．学校图书馆买来故事书和科技书。故事书 710 本，比科技书的 3 倍少 10 本。买来科技书多少本？

2．学校食堂买进大米 830 千克，吃了 12 天之后，还剩 50 千克。平均每天吃大米多少千克？

3．园园到文化用品商店买了 9 支铅笔和 14 本笔记本，共用去 3.52 元。每支铅笔 8 分钱，每本笔记本多少钱？

4．某人从甲地出发到乙地去。先骑自行车，每小时行 14 千米，行了 2 小时后改乘汽车。汽车行了 3 小时到达乙地。已知乘汽车比骑自行车多行了 122 千米，求汽车平均每小时行多少千米？

5．甲、乙两位工人合作 24 天共加工机器零件 576 个。工人甲平均每天加工 11 个，工人乙平均每天加工多少个？

6．甲、乙两数的和是 320，甲数是乙数的 9 倍。求甲、乙两数各是多少？

7．小敏买了一支钢笔和一支铅笔共用去 3.15 元。已知一支钢笔的价钱是一支铅笔价钱的 20 倍。求一支钢笔和一支铅笔各多少钱？

8．两个工程队共同挖一条水渠。第一队挖的是第二队的 2.5 倍，又知第一队比第二队多挖了 75 米。两个工程队各挖了多少米？

9．甲瓶里的酒精是乙瓶酒精的 3 倍。如果从甲瓶里取出酒精 120 毫升倒入乙瓶里，这时两瓶的酒精就相等了。求甲、乙两瓶里原来各有酒精多少毫升？

10．甲、乙、丙三个数的和是 370。甲数是乙数的 3 倍，丙数比乙数多 20。求甲、乙、丙三个数各是多少？

第八讲　邮递线路问题

一、多笔画

在第一册第八讲例 1 中，我们讨论了下列图形的一笔画问题。

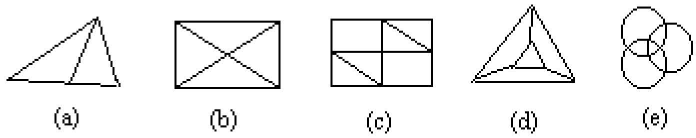


图8—1

通过观察列出了下表：

图号	a	b	c	d	e
奇结点个数	2	4	0	6	0
偶结点个数	2	1	9	0	6
能否一笔画	能	不能	能	不能	能

由此表我们发现，一个图能否一笔画成与图的奇结点的个数有关系。如果我们再进一步观察，还可发现，这些图中的奇结点的数目都是偶数。这是一种偶然的巧合还是一种普遍的规律呢？如果我们再观察一些其它的图，结果也是没有出现奇结点数目是奇数的现象。于是我们可以作如下猜想：

在任何一个图中，奇结点的个数一定是偶数。

这是因为一个图的每条边都与两个结点相连结，所以，如果把一个图的所有结点的度数相加，由于每条边都计算了两次，其度数和是边数的 2 倍，它是偶数，可设为 2n。又因为每个偶结点的度数都是偶数，它们的度数和当然是偶数，可设为 2m。由此可知，所有奇结点的度数和为

$$2n-2m=2(n-m)\quad（n、m 为自然数）$$

也是一个偶数，但每个奇结点的度数都是奇数，所以奇结点的个数一定是偶数。否则，如果奇结点的个数是奇数，那么，因为奇数个奇数的和是奇数，就得到所有奇结点度数的和是奇数。这与上述结论相矛盾。这就说明，在任何一个图中，奇结点的个数一定是偶数。

例 1　先数一数下列各图形中奇结点的个数。如果有的图形不能一笔画成，那么，至少几笔才能画成？

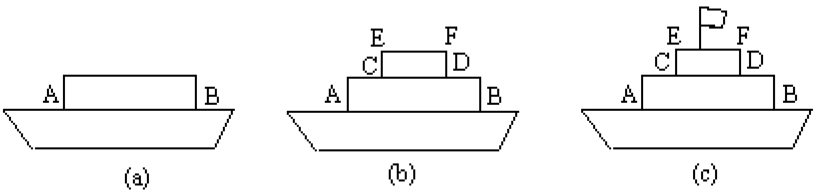


图8—2

分析与解　：图 8－2（a）中只有两个奇结点，根据欧拉定理，可从 A 点出发一笔画出到 B 点结束，图（b）中有四个奇结点，不能一笔画成。图 8－2（b）与图（a）比较，多出了折线 CEFD。如果先一笔画出图（a），再添一笔画出折线 CEFD，就可得到图（b）。因此，图（b）至少两笔才能画成。

图 8－2（c）中共有六个奇结点，也不能一笔画成。图（c）与图（b）比较又多出了一面旗子。它也含有两个奇结点，于是在两笔画出图（b）的基础上，再添一笔画上旗子，就成了图（c）。因此，图（c）至少三笔才能画成。

例 2　图 8－3（a）表示一所房子，问至少几笔才能画成？

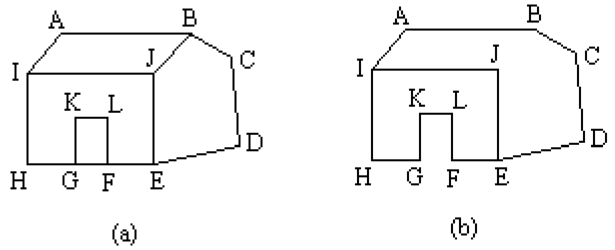


图8—3

分析与解：1 图 8－3（a）所示的图中共有 B、E、F、G、I、J 六个奇结点，所以不能一笔画成。如果我们将两个奇结点间的连线去掉一条，那么这两个奇结点就成为偶结点了。当我们把图中奇结点的个数减少到 2 个时，（想一想，奇结点个数为何不需减少到零个？）新的图就可以一笔画成了。

在图（a）中，第一笔画 BJ，第二笔画 GF。这样剩下 I、E 两个奇结点，如图（b）所示，这个图是可以一笔画成的。所以这所房子至少要三笔才能画成。

由上述两个例题看到，如果图中有两个奇结点，一笔就能画出；有四个奇结点，至少两笔才能画出；有六个奇结点，至少三笔才能画出；如果图中有八个奇结点，利用同样的道理分析，至少四笔才能画成。一般地，一个连通图如果有 2n（n 为自然数）个奇结点，那么至少画 n 笔才能画成。我们把这类问题称作多笔画问题。

二、邮递路线

问题　一个邮递员每次送信，要走遍他负责投递的范围内的街道，完成任务后回到邮局。问他按怎样的路线走，所走的路程最短？

这个问题叫做最短邮递路线问题，是一个即有趣又实用的问题。

例 3　图 8－4（a）、（b）都表示街道图。图中 A 是邮局的位置，问邮递员应如何设计他的邮递路线，才能使他所走的路程最短？

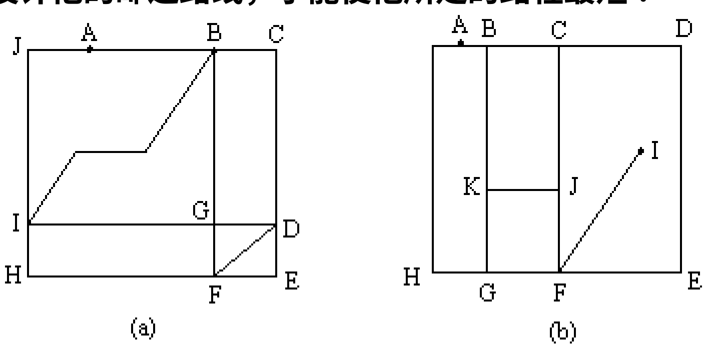


图8—4

分析与解：由于（a）所表示的图无奇结点，所以是一个欧拉图。他可以从邮局出发，不重复地走遍每条街道，回到邮局，这就是投递员的最短路

线。而（b）所表示的图有六个奇结点，它不是一笔画，要不重复地走遍街道是不可能的。为了走遍所有的街道，必须重复走某些街道。重复走哪些街道才能使总路程最短呢？

由于任何一个图中奇结点的个数都是偶数，所以可把奇结点两两配对。如果在一对奇结点之间连一条虚线当作增添的重复边，奇结点就变成了偶结点，用这种方法可使原来的图变成没有奇结点的欧拉图（增添了重复边）。现在的问题是如何去连这些虚线，才能保证总路程最短。其原则是：

（1）连线（虚线）不能有重叠线段；

（2）在每一个圈上，连线长度之和不能超过圈长的一半。

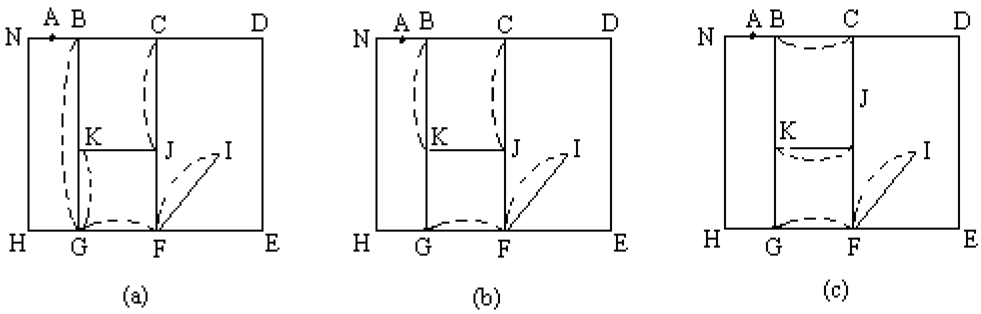


图8—5

例如，图 8－5（a）中，连虚线时在 KG 一段上发生重叠。根据原则（1），应去掉重叠部分改成图 8－5（b）。但在（b）中，对于 BKJCB 这个圈来说，增添的虚线长超过圈长的一半。根据原则（2），可以继续改进成（c）中增添虚线的情形，这是一种最好的增添虚线的方法。因此，最好的投递路线是 ABCDE－FIFJCBKGFGHNA（参看图 8－6）

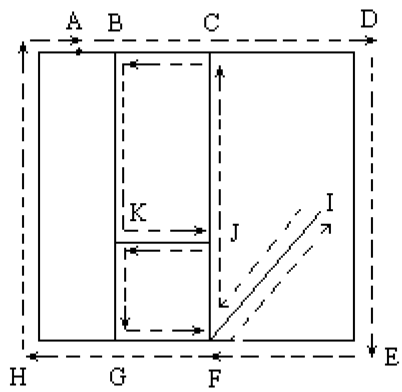


图8—6

例 4　图 8－7 表示某城市的街道图，九个区都是边长为 1 公里的正方形，现需设一牛奶站，希望找一最佳地址，要能使送奶车以最短路程跑遍城市的所有街道，然后返回奶站。如果小明把奶站选在 P 点，试问他选的地方对吗？送一遍奶所走的最短路程比该城市全部街道的总长长多少？

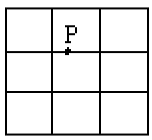


图8—7

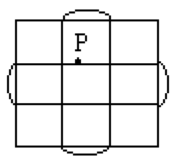
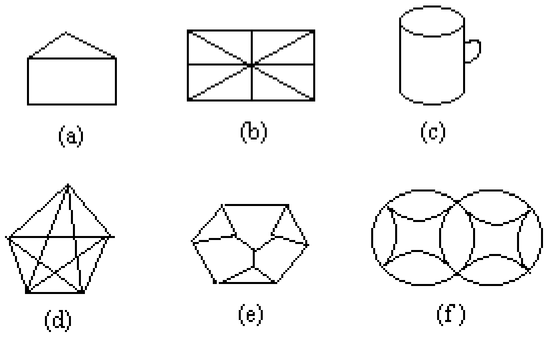


图8—8

分析与解：由于图 8－7 中有 8 个奇结点，所以必须重复走某些街道，才能送遍全城回到奶站。根据例 3 中的两条原则，重复路线可添设如图 8－8。这样图中的结点全部为偶结点，说明奶站设在街道任何一处都一样。因此，小明选在 P 点没有错。一次送遍全城回到奶站的最短路程应是 24＋4＝28（公里）比城市全部街道总长多 4 公里，多走城市街道总长的 16.7%。

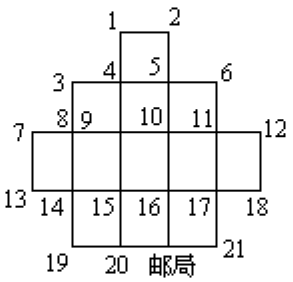
习题八

1．判断下列各图能否一笔画成。若不是一笔画，则至少几笔才能画成？

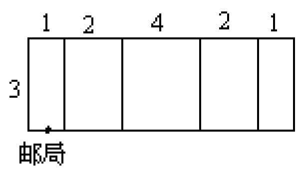


（第1题）

2．各单位在图中用数字标出，彼此间有路相通。一邮递员从邮局出发，向各单位传递邮件，他能否不走重复路线，也不经重复单位，又回到邮局？



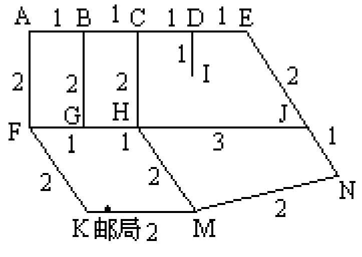
（第2题）



（第3题）

3．一个邮递员投递信件的街道如图所示。图上数字表示各段街道的公里数。他从邮局出发，要走遍各街道，最后回到邮局，请为他设计一条最合理的路线，全程要走多少公里？

4．一个投递员投递的街区如图所示。图上数字表示各街道的长度。他从邮局出发，走遍各街道，最后回到邮局。请为他设计一条最优投递路线，并求出全程的公里数。



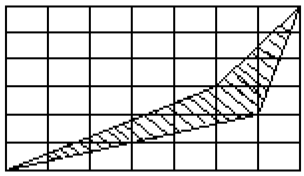
（第4题）

测试题（一）

1．下面三个数中，只有一个是质数，把它找出来：

1261，1112111，251

2．500 是一个合数，求它有多少约数？这些约数的和是多少？

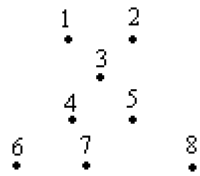


3．上图中的每个小长方形的面积都是“1”，那么图中阴影部分的面积是多少？

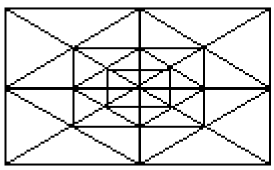
4．将下图(a)中的三角形纸片沿虚线折叠得的粗实线所围成图形的面积（见右图中(b)）是原三角形面积的三分之二，已知图（b）中三个画阴影的三角形面积之和为“1”，那么图 b 中非阴影部分的面积是几？

(a)　　　　(b)

5．下图是由 8 个钉组成的不规则钉阵，我们分别用 1、2、3、4、5、6、7、8 依次给它们编号。这里 1、3、5；2、3、4、；6、7、8 三钉分别在同一直线上，以这些钉为顶点，用皮筋去套，你能套出多少个三角形来？



6．数一数下图中有多少个三角形（图中最外层的四边形是个长方形）？



7．计算下面各题

（1）75000÷125÷15

（2）4200÷4÷25

（3）360×40÷60

8．把下面十进制数化为二进制数

（1）$73_{(10)}$　　（2）$315_{(10)}$

9．把下面三进制数化为二进制数

（1）$210_{(3)}$　　（2）$2012_{(3)}$

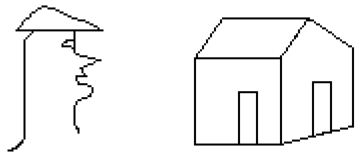
10．饲养小组共有鸡、鸭 670 只，后来卖出鸡的一半，又买入 65 只鸭，这时，鸡、鸭的只数恰好相等。求原有鸡、鸭各多少只？

11．有大、小两个水池，大水池里现在有水 3180 立方米，小水池里现在有水 800 立方米。计划往两水池里注入同样多的水，使大水池的水量是小水池水量的 3 倍。求两水池各应注入多少立方米的水？

12．修一条水渠，计划每天修 40 米，60 天完成。实际 50 天就完成了任务，求实际每天比原计划多修多少米？（用方程法解）

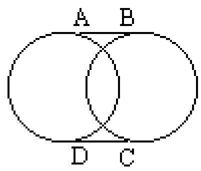
13．学校食堂运进一批煤，原计划每天烧 300 千克，54 天烧完。实际每天比原计划节约 30 千克，实际比原计划多烧了多少天？（用方程法解）

14．下列各图至少需几笔画成。



(a)　　(b)

15．如图为一花圃路径，两圆半径都为 5 米，AB＝CD＝8 米。一人在花圃散步。从某点出发，走遍整个花圃，回到原地，至少应走多少米？（π≈3.14）



第九讲　细观察、找规律

在第一册第九讲中曾经介绍了“数列”的概念和表示符号。数列就是按照一定规律排列的一列数。

最简单的问题是由数列的排列规律写出这个数列或这个数列的某些项。

例 1　按下列规律，写出数列的前 5 项

（1）质数从小到大排列成的数列；

（2）自然数中的平方数，从小到大排列成的数列；

（3）$a_n=3n+1$；

（4）$a_n=2^n-1$；

（5）$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$。

解：（1）2，3，5，7，11；

（2）1，4，9，16，25；

（3）$a_1=3\times1+l=4$，$a_2=3\times2+1=7$，

$a_3=3\times3+1=10$，$a_4=3\times4+1=13$，

$a_5=3\times5+1=16$；

（4）$a_1=2^1-1=1$，$a_2=2^2-1=3$，

$a_3=2^3-1=7$，$a_4=2^4-1=15$，

$a_5=2^5-1=31$；

（5）$a_1=1$，$a_2=3\times1+1=4$，

$a_3=3\times4+1=13$，

$a_4=3\times13+1=40$，

$a_5=3\times40+1=121$。

和例 1 相反，如果给出数列的一些项，要求探究它的构造规律，就需要细致观察，并进行分析。

例 2　找出下列各数列的构造规律，并填空。

（1）1，3，6，10，15，——，28；

（2）1，8，27，64，——，216；

（3）1，3，7，15，——，63；

（4）1，2，3，5，8，——，——，34；

（5）2，3，5，7，——，13。

分析与解：（1）从给出的六个数本身看，看不出什么共同属性。如果分析彼此之间的关系，发现：

$a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=3$，$a_4-a_3=4$，$a_5-a_4=5$。是有规律的，“相邻两项的差成等差数列”。照此规律，$a_6=a_5+6=15+6=21$。

已知 $a_7=28$，$a_7-a_6=7$ 同样是适合的。

（2）从互相之间的差看不出什么规律。但从各自属性分析发现：

$a_1=1^3=1$，$a_2=2^3=8$，$a_3=3^3=27$，$a_4=4^3=64$，

可以猜测 $a_5=5^3=125$。规律是：“各项等于它的项数的立方”。

由 $a_6=216=6^3$ 也是符合这个规律的。

（3）从相邻两项之差看：

$a_2-a_1=3-1=2$，$a_3-a_2=7-3=4$，$a_4-a_3=15-7=8$，

“相邻两项差构成等比数列”

$a_5-a_4=16$，$a_5=a_4+16=31$。

已知 $a_6=63$，$a_6-a_5=63-31=32$。也符合以上规律。

换一个角度，还发现如下规律：

$a_1=1=2^1-1$，$a_2=3=2^2-1$，$a_3=7=2^3=1$，$a_4=15=2^4-1$，照此规律，$a_5=2^5-1=31$，$a_6=2^6-1=63$。

你也许还发现如下规律：

$a_2=2a_1+1=2\times1+1=3$，$a_3=2a_2+1=7$，

$a_4=2a_3+1=15$，照此规律 $a_5=2a_4+1=31$，

$a_6=63=2a_5+1$。

（4）对这个数列构造规律，需要从更广的角度观察，从相邻三项的关系，发现如下规律：

$a_3=a_1+a_2$，$a_4=a_2+a_3$，$a_5=a_3+a_4$，照此规律。

$a_6=a_4+a_5=5+8=13$，$a_7=a_5+a_6=8+13=21$。

$a_8=34=a_6+a_7$ 也符合规律。

（5）从各项本身性质，不难发现它们是依次排列的质数（从小到大）。$a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=5$，$a_4=7$。照此，$a_5=11$。

说明：观察、分析数列构造规律，就要从各项的性质，相邻项（两项或三项）之间的关系进行归纳。开始可能是一种猜测，在猜测基础上再进行检验。对于一个无限数列如果给的项数是有限的，规律不是唯一的。如数列 2，3，5，……。

①如果看作是质数从小到大排列，那么 $a_4=7$，$a_5=11$；

②如果看作是 $a_2-a_1=1$，$a_3-a_2=2$，$a_4-a_3=3$，那么 $a_4=8$，$a_5=12$；

③如果看作是 $a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=a_1=a_2$，那么 $a_4=8$，$a_5=13$。

例 3　把自然数按以下规律分组：

（1），（2，3，4），（5，6，7，8，9），……；

其中第一组 1 个数，第二组有 3 个数，第三组有 5 个数，第四组有 7 个数，…….求

（1）第 11 组所有数之和；

（2）1993 排在第几组的第几个数？

解：不难发现每组的数的个数等于它的组序号的 2 倍减 1。就是说第 k 组有（2k－1）个数。

（1）先计算前 10 组所有数的个数。

$1+3+5+\cdots\cdots+(2\times10-1)=[1+(2\times10-1)]\times10\div2=100$。

第 11 组的第 1 个数是 101，共有（2×11－1）个数。最后一个数是 $100+(2\times11-1)=121$。

第 11 组所有数之和是：

$101+102+\cdots\cdots+121=(101+121)\times21\div2=2331$。

（2）如果 1993 在第 k 组，那么 1993 必须大于前（k－1）组中所有数的个数，并且不大于前 k 组中所有数的个数。

前（k－1）组数的个数是：

1＋3＋5＋……＋［2（k－1）－1］＝{1＋［2（k－1）－1］}×（k－1）÷2＝（k－1）^{2}。

同理前 k 组数的个数是 k^2。

（k－1）^{2}＜1993≤k^2。

又因为 44^2＝1936，45^2＝2025，所以 1993 在第 45 组。

前 44 组有 1936 个数，就是说第 44 组最后一个数是 1936。

1993－1936＝57。

答：第 11 组所有数之和是 2331，1993 排在第 45 组的第 57 个数。

说明：通过观察或计算，我们还发现，每一组的最后一个数正好等于它所在组数的平方。利用这个规律解决问题就更简单了。如求第 15 组的各数之和：

第 15 组的第 1 个数是 14^2＋1＝197，第 15 组最后一个数是 15^2＝225。这组共有 29 个数，它们的和是

197＋198＋……＋225＝（197＋225）×29÷2＝6119.

练习

自然数按例 3 规律分组。求

（1）987 排在第几组？

（2）第 11 组和第 12 组两组中所有数的和是多少？

（3）第 80 组中的正中间是哪个数？

例 4　观察下列各数排列规律：

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$，……。

求：（1）$\frac{11}{27}$排在第几个位置？（2）第100个位置上是哪个数？

解：（1）通过观察发现，在这个数列中依次排列着：分母是 2 的有 1 个数，分母是 3 的有 2 个数，分母是 4 的有 3 个数，……。如果按分母不同分组：

第1组有1个数，第2组有2个数，第3组有3个数，……，$\frac{11}{27}$排在第26组第11个数。

（1＋2＋3＋…＋25）＋11＝（1＋25）×25÷2＋11＝336

（2）先考虑第 100 个位置排在第几组的第几个数。前 k 组所有数的个数是：

$$S_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{(1+k)\ k}{2}。$$

估值：k＝13 时，S_{13}＝91；k＝14，S_{14}＝105

第 100 个数一定排在第 14 组。

100－91＝9。

第 100 个位置的数排在第 14 组的第 9 个数。这组的数的分母是 15，这组第9个数的分子是9。所以是$\frac{9}{15}$。

答：$\frac{11}{27}$排在第336个位置，第100个位置是$\frac{9}{15}$。

在例4的数列中，（1）求$\frac{7}{39}$排在第几个位置？（2）第1993个位置上是哪个数？

例 5　有一个数列：

1，2，3，5，8，13，……。（从第 3 个数起，每个数恰好等于它前面相邻两个数的和）

（1）求第 1993 个数被 6 除余几？

（2）把以上各数依次按下面方法分组

（1），（2，3），（5，8，13），……。（第 n 组含有 n 个数）。

问第 1993 组的各数之和被 6 除余几？

分析：如果能知道第 1993 个数是哪个数，第 1993 组有哪些数，问题很容易解决。可是要做到这一点不容易。由于我们所研究的是“余数”，如能构造出数列各项被 6 除，余数构成的数列，问题也可以得到解决。

解：根据“如果一个数等于几个数的和，那么这个数被 a 除的余数，等于各个加数被 a 除的余数的和再被 a 除的余数”。得到数列各项被 6 除，余数组成的数列是：

1，2，3，5，2，1，3，4，1，5，0，5，5，4，3，1，4，5，3，2，5，1，0，1，1，2，3，5，……。

观察规律，发现到第 25 项以后又重复出现前 24 项。呈现周期性变化规律。一个周期内排有 24 个数。（余数数列的前 24 项）

（1）1993÷24＝83……1。

第 1993 个数是第 84 个周期的第 1 个数。因此被 6 除是余 1。

（2）因为分组规律是第 n 组含有 n 个数。前 1992 组共有 S_{1992} 个数，

$$S_{1992}=1+2+3+\cdots+1992=\frac{1993\times1992}{2}=1985028。$$

1985028 除以 24 余 12，第 1992 组最后一个数除以 6，余数是 5，第 1993 组各数被 6 除余数是：

5，4，3，1，4，5，3，2，5，1，0，1，1，2，3，5，2，1，3，4，1，5，0，5；……（以后各数周期性变化）。

一个周期内 24 个数之和为 66，它被 6 整除。

1993 除以 24 余数为 1，因此，第 1993 组各数之和被 6 除应该余 5。（第 1993 组的第一个数被 6 除所得余数）

练习

在例 5 数列中，求它的第 1993 项被 3 除余几？被 7 除余几？

例 6　把自然数依次排成以下数阵：

1，2，4，7，…

3，5，8，…

6，9，…

10，…

…

如果规定横为行，纵为列。（如 8 排在第 2 行第 3 列）求

（1）第 10 行第 5 列排的是哪个数？

（2）第 5 行第 10 列排的是哪个数？

（3）1993 排在第几行第几列？

分析：这个问题可以从两个方面找规律。（1）第一行是：1，2，4，7，11，……；它们相邻两个数之差是 1，2，3，4，5，……。第二行是：3，5，8，12，……；它们相邻两数之差是 2，3，4，5……。

列也有类似的规律。

这样，第 10 行第一列的数应是

1＋2＋3＋4＋…＋10＝55。

又因为第 10 行中，相邻两数的差依次是

10，11，12，13，……。所以，第 10 行第 5 列的数是

55＋10＋11＋12＋13＝101。

第 5 行第 10 列的数是：

（1＋2＋3＋4＋5）＋（5＋6＋7＋8＋9＋10＋11＋12＋13）＝96

以上是先考虑行，再考虑列，也可以先考虑列，再考虑行。

（2）数阵排列规律是：将自然数依次“从右上向左下”成“斜行”往复排列。第一斜行只有 1 个数，第 2 斜行有 2 个数，第 3 斜行有 3 个数，……，第 n 斜行有 n 个数。

行、列数与斜行数有以下关系：

“1”排在第 1 行、第 1 列，斜行数为 1；

“2”排在第 1 行、第 2 列，斜行数为 2；

“3”排在第 2 行、第 1 列，斜行数为 2；

“4”排在第 1 行、第 3 列，斜行数为 3；

“5”排在第 2 行、第 2 列、斜行数为 3；

“6”排在第 3 行、第 1 列，斜行数为 3。

…………

不难发现，同一斜行中，各数的“行数”与“列数”之和是不变的。并且：

行数＋列数－1＝斜行数。

因为在斜行中，是由上往下排的。一个数在第几行，它就是所在斜行中的第几个数。

利用以上规律，解决问题就更简单

解：（1）第 10 行、第 5 列的数是排在第 10＋5－1＝14 斜行的第 10 个数：

［1＋2＋3＋…＋（10＋5－2）］＋10＝101；

（2）［1＋2＋3＋…＋（5＋10－2）］＋5＝96；

（3）如果 1993 排在第 k 斜行。前（k－1）斜行数的个数是：

$1+2+3+\cdots+(k-1)=\frac{k(k-1)}{2}$；

前 k 斜行数的个数是：

$1+2+3+\cdots+k=\frac{(k+1)\cdot k}{2}$。

应该有$\frac{k(k-1)}{2}<1993<\frac{(k+1)\cdot k}{2}$。

即 k（k－1）＜3986＜（k＋1）·k。

估算：k＝63 时，k（k－1）＝3906，（k＋1）·k＝4032。

3902＜3986≤4032。

所以 1993 排在第 63 斜行内。

第 62 斜行最后一个数是：

$$1+2+3+\cdots+62=\frac{63\times62}{2}=1953,$$

1993－1953＝40。就是说 1993 是第 63 斜行的第 40 个数。也就是排在第 40 行。

求列数：63＋1－40＝24。（列）

答：第 10 行第 5 列是 101，第 5 行第 10 列是 96，1993 排在第 40 行第 24 列。

练习

自然数排成例 6 形式数阵。求

（1）第 7 行第 8 列的数是哪个数？

（2）第 8 行第 7 列的数是哪个数？

（3）1949 排在第几行第几列？

习题九

1．观察下列数列的排列规律，并填空：

（1）2，5，10，17，——37；

（2）1，3，2，6，5，15，14，——，41。

2．观察下表：

1＝1，

3＋5＝8，

7＋9＋11＝27，

13＋15＋17＋19＝64，

…………

写出它的第 10 行

3．已知数列：1，1，2，2，3，3，1，1，2，2，3，3，……（以 l，1，2，2，3，3，为周期，重复写下去）。

求（1）第 150 个数是哪个数？

（2）前 50 个数之和是多少？

（3）若前 n 个数之和为 304，求 n。

4．已知数列：$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$，……。

求：（1）$\frac{7}{10}$是第几个数？

（2）第 1991 个数是哪个数？

5．观察下列“三角阵”

1

2 3 4

5 6 7 8 9

10 11 12 13 14 15 16

………

求它的第 15 行的第 7 个数是哪个数？

6．把自然数中的偶数，依次排列如下：

（第一列）	（第二列）	（第三列）	（第四列）	（第五列）
	2，	4，	6，	8
16	14	12	10	
	18	20	22	24
32	30	28	26	

………

求 1986 出现在第几列？

7．把自然数中的奇数依次排列：

1，3，7，13，…

5，9，15，…

11，17，…

19，…

…

求第 10 行第 10 列的数是哪个数。

8．把自然数依次排成以下数阵：

1，2，5，…

4，3，6，…

9，8，7，…

………

求（1）第 10 行第 5 列排的是哪个数？

（2）第 5 行第 10 列排的是哪个数？

（3）1991 排在第几行、第几列？

第十讲　最大公约数与最小公倍数

如果一个数同时是几个数的约数，那么我们就称它为这几个数的公约数。几个数的公约数中最大的一个，称为这几个数的最大公约数。

如果一个数同时是几个数的倍数，那么我们就称它是这几个数的公倍数。几个数的公倍数中最小的一个，称为这几个数的最小公倍数。

求最大公约数和最小公倍数一般有以下几种方法。

1．短除法：

例 1　求 8，12，18 的最大公约数和最小公倍数。

解：求最大公约数和最小公倍数的最常用的办法就是短除法。具体作法如下：

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 8 & 12 & 18 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 9 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 9 \\ \hline & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

8、12、18 的最大公约数为 2。

8、12、18 的最小公倍数为 2×2×3×2×3＝72

我们习惯上用（8，12，18）表示，8，12，18 的最大公约数，即：

（8，12，18）＝2 用［8，12，18］表示 8，12，18 的最小公倍数，即［8，12，18］＝72

短除法的长处在于它可同时求出最大公约数和最小公倍数。在求三个以上数的最大公约数和最小公倍数时，尤其简便。

2．分解质因数法：

分解质因数是求最大公约数的最直接的方法。但往往被忽视。

例2　将 $\frac{6933}{25421}$ 化成最简分数。

解：化简分数实际上就是求分子分母的最大公约数。如果用短除法，就会发现很难找出其公有的质因数。但很容易看出 6933 是 3 的倍数，25421 是 11 的倍数。

实际上，只要将分子分母分解质因数，就很容易看到结果。

6933＝3×2311

25421＝11×2311

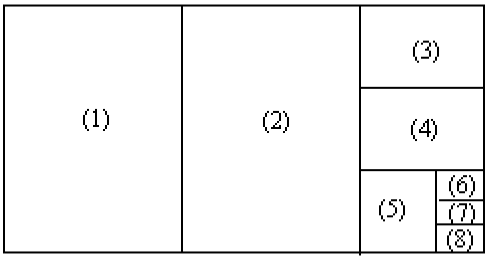
所以 $\frac{6933}{25421}=\frac{3}{11}$

无论是短除法，还是分解质因数法，在质因数较大时，都会觉得困难。这时就需要用新的方法。

3．辗转相除法：

例 3　从一张长 2002 毫米、宽 847 毫米的长方形纸片上，剪下一个边长尽可能大的正方形，如果剩下的部分不是正方形，那么在剩下的纸片上再剪下一个边长尽可能大的正方形，按照上面的过程不断地重复，最后剪得的正方形的边长是______毫米。

解：剪的过程如图所示



第一、二次剪下 847×847 平方毫米的正方形。

第三、四次剪下边长 308 毫米的正方形。

第五次剪下边长 231 毫米的正方形。

第六、七，八次剪下边长 77 毫米的正方形。

以上的解题过程，实际上给出了求最大公约数的另一个办法——辗转相除法。以上过程可用算式表示如下：

2002＝847×2＋308

847＝308×2＋231

308＝231×1＋77

231＝77×3

由以上算式可以看出；这种方法就是用大数除以小数，再用上次运算中的除数除以余数，如此反复除，直至余数为零。最后一个除数就是两数的最大公约数。这是因为；两个数的最大公约数，同时是两个数的约数，也就是余数的约数。拿这道题来说，2002 和 847 的公约数，也就是 847 与 308 的公约数，也就是 308 与 231 的公约数，也就是 231 与 77 的公约数。由于 231 是 77 的倍数，所以它们的最大公约数就是 77，即 2002 与 847 的最大公约数。

辗转相除法的竖式格式如下：

2	2002 1694	847 616	2
1	308 231	231 221	3
	77	0	

最大公约数与最小公倍数的一个重要性质是：两个数的乘积等于其最大公约数与最小公倍数的乘积。

例 4　求 36953 与 59570 的最大公约数。

解法 1：用辗转相除法

1	36963 22607	59570 36963	1
1	14356 8251	22607 14356	1
2	6105 4292	8251 6105	1
5	1813 1665	2146 1813	1
4	148 148	333 296	2
	0	37	

（36963，59570）＝37

解法 2：上面的方法计算量很大。能否简化运算呢？

通过观察容易发现，36963 有约数 3×3。而 59570 没有质因数 3。59570 有质因数 2 和 5，36963 没有质因数 2 和 5。所以可以从 36963 中分解出 3×3，从 59570 中分解出 2×5，再求其余部分的最大公约数。

36963＝3×3×4107

59570＝2×5×5957

2	4107 3700	5957 4107	1
1	407 222	1850 1628	4
5	185 185	222 185	1
	0	37	

（36963、59570）＝37

由此可见，求最大公约数的几种方法并非是截然分开的。还可把他们结合起来使用。

例 5　下面两个算式中，得数较大的是哪一个？

（1）　$\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{29}\right)\times 30$　　（2）　$\left(\frac{1}{31}+\frac{1}{37}\right)\times 40$

分析：如要算出得数，计算量很大。比较一下两个式子。括号内都是两个分子为 1 的分数相加。如果能使括号外部分相同。那么括号内部分就比较好比较了。

解：［30，40］＝120

$\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{29}\right)\times 30=\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{29}\right)\div 4\times 4\times 30$

$=\left(\frac{1}{96}+\frac{1}{116}\right)\times 120$

$\left(\frac{1}{31}+\frac{1}{37}\right)\times 40=\left(\frac{1}{31}\times\frac{1}{37}\right)\div 3\times 3\times 40$

$=\left(\frac{1}{93}+\frac{1}{111}\right)\times 120$

由于 $\frac{1}{93}$ 大于 $\frac{1}{96}$，$\frac{1}{111}$ 大于 $\frac{1}{116}$，所以（2）式得数较大。

最大公约数与最小公倍数的性质，在解题中会经常遇到。

例6　参加迎春杯数学竞赛的人数共有2000多人。其中光明区占 $\frac{1}{3}$，中心区占 $\frac{2}{7}$，朝阳区占 $\frac{1}{5}$，剩余的全是远郊区的学生。比赛结果，光明区有 $\frac{1}{24}$ 的学生得奖，中心区有 $\frac{1}{16}$ 的学生得奖，朝阳区有 $\frac{1}{18}$ 的学生得奖，那么参赛学生有_____名。

解：光明区获奖人数占参赛学生总数的：

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{24}=\frac{1}{72}$

中心区获奖人数占参赛学生总数的：

$$\frac{2}{7}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{56}$$

朝阳区获奖人数占参赛学生总数的：

$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{18}=\frac{1}{90}$$

所以参赛学生总数，应是 72，56，90 的倍数。

[72，56，90] ＝2520

所以参赛学生总数是 2520 的倍数。由已知参赛学生共有 2000 多人，可知参赛人数就是 2520 人。

例7　狐狸和黄鼠狼进行跳跃比赛，狐狸每次跳$4\frac{1}{2}$米，黄鼠狼每次跳$2\frac{3}{4}$米，它们每秒钟都只跳一次。比赛途中，从起点开始每隔$12\frac{3}{8}$米设有一个陷井，当它们之中有一个掉进陷井时，

另一个跳了______米。

分析：当狐狸跳了若干次时，如恰好跳到距起点的距离为$12\frac{3}{8}$的倍数，则它就会掉进陷井。要求出它何时掉进陷井，就要求出$4\frac{1}{2}$与$12\frac{3}{8}$的

“最小公倍数”。但两数都是分数，它们的“最小公倍数”是什么意思？如何求呢？

解：将$4\frac{1}{2}$与$12\frac{3}{8}$通分。

$$4\frac{1}{2}=\frac{9}{2}=\frac{36}{8}$$

$$12\frac{3}{8}=\frac{99}{8}$$

求两分数分子的最小公倍数。

[36，99] ＝396

两分数的“最小公倍数”规定为化为同分母后，以分子的最小公倍数作为分子，相同分母作分母的分数。

那么，两数的最小公倍数为$\frac{396}{8}$，即$\frac{99}{2}$。$\frac{99}{2}\div4\frac{1}{2}=11$。

所以狐狸跳 11 次掉进陷井。

再来看看黄鼠狼。

$2\frac{3}{4}=\frac{22}{8}$　　　$12\frac{3}{8}=\frac{99}{8}$

[99，22] ＝198

黄鼠狼跳$\frac{198}{8}$米时掉进陷井。这时它跳了

$\frac{198}{8}\div\frac{22}{8}=9$（次）

所以黄鼠狼比狐狸先掉进陷井。它掉进陷井时，狐狸跳了

$4\frac{1}{2}\times9=40\frac{1}{2}$（米）

例 8　一条公路由 A 经 B 到 C。已知 A、B 相距 280 米，B、C 相距 315 米。现要在路边植树，要求相邻两树间的距离相等。并在 B 点及 AB、BC 的中点上都要植一棵。那么两树间距离最多有多少米？

分析：由于AB和BC的中心要种一棵树，所以要将140米和$157\frac{1}{2}$米均分成几段，使每段长度相等。这就要求140与$157\frac{1}{2}$的最大公约数。

解：将140与$157\frac{1}{2}$通分

$$140=\frac{280}{2}\qquad 157\frac{1}{2}=\frac{315}{2}$$

∵　（280、315）＝35

所以两数的最大公约数为$\frac{35}{2}$（即$17\frac{1}{2}$）。

故最多相隔$17\frac{1}{2}$米种一棵树。

由上面两个例题可以看出，最大公约数与最小公倍数的概念，如果必要也可以扩展到分数的范围。

习题十

1．求 35，98，112 的最大公约数与最小公倍数。

2．求 403，527，713 的最小公倍数。

3．求 83613 与 121824 的最大公约数。

4．老师将 301 个笔记本，215 支铅笔和 86 块橡皮分给班里同学，每个同学得到的笔记本、铅笔和橡皮的数量相同。那么，每个同学各拿到多少？

5．两个合数的积是 5766，它们的最大公约数是 31。那么，这两个数是多少？

6．两个数的最大公约数是 6，最小公倍数是 504。如果其中一个数是 42，那么另一个数是多少？

7．某校全体学生列队。不论他们人数相等地分成 2 队、3 队、4 队、5 队、6 队、7 队、8 队、9 队，都会多出 1 人。那么该校至少有多少名学生？

第十一讲　集合的基本概念

1．集合和元素

俗话说“物以类聚”。人们常常把同类事物放在一起考虑，就组成了所谓集合。例如，“太阳系的九大行星”就是一个集合；“某小学在校的全体学生”是一个集合；“某台机器的全部零件”也是一个集合；长江、黄河、珠江、黑龙江组成了中国四大河流的集合。集合是指具有一定性质的事物汇成的整体。集合简称集。组成集合的每个事物称为这个集合的元素。

为了方便起见，通常用大写字母 A，B，…，N，…等表示集合，而用小写字母 a，b，…，n，…等表示元素。但在有些特殊的集合中，元素往往已有既定的符号。

例 1　如果我们把由阿拉伯数字 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，组成的集合记作 A，那么每个阿拉伯数字就是集合 A 的元素。

例 2　通常把所有自然数组成的集合记作 N，N 的元素就是 1，2，3，…，n，…。

上述的集合 A 和 N 的元素已有既定的符号，而不用 a，b，c，…等表示。

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的。这就是说，任何一个事物，或者是这个集合中的元素，或者不是它的元素。

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$。这里，符号“$\in$”读作“属于”。如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a\overline{\in}A$（或 $a\notin A$）。这里符号“$\overline{\in}$”（或 $\notin$）读作“不属于”。例如，如果 A 表示阿拉伯数字的集，那么，$O\in A$ 而 $10\overline{\in}A$。又如，用 N 表示自然数集，那么，$100\in N$，而 $0.5\overline{\in}N$。

对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的。这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的事物；相同事物归入某一个集合时，只能算作这个集合的一个元素。因此，集合中的元素是不重复的。

含有有限个元素的集合叫做有限集。上面的阿拉伯数字的集合，中国四大河流的集合都是有限集。含有无限个元素的集合叫做无限集。上面的自然数集合 N 就是无限集。

2．集合的表示方法

集合的表示方法，常用的有列举法和描述法。

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做列举法。

例如，由阿拉伯数字组成的集合 A 可表示为

A＝｛0，l，2，3，4，5，6，7，8，9｝。

又如，用 B 表示中国四大河流的集合，那么 B 可表示为

B＝｛长江，黄河，珠江，黑龙江｝。

用列举法表示集合时，不必考虑元素之间的顺序。例如，上面的集合 B 也可表示为

B＝｛黄河，长江，黑龙江，珠江｝。

应该注意，a 和｛a｝是不同的：a 表示一个元素；｛a｝表示一个集合，这种集合只有一个元素 a，我们称这种集合叫单元素集。

把集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫

做描述法。这时往往在大括号内先写上这个集合的元素的一般形式，再画一条竖线，在竖线右边写上这个集合的元素的公共属性。

例如，设所有正数（即大于零的数）组成的集合记作 F，那么 F 表示成

$$F=\{x \mid x>0\}。$$

这里 x 表示元素的一般形式,竖线右边的 x＞0 是这个集合元素的公共属性。

在不引起混淆的情况下，为了简便，有些集合用描述法表示时，可以省去竖线及其左边部分。例如，由所有的直角三角形组成的集合，可以表示为

{直角三角形}

3．子集

我们知道，任何一个正偶数都是自然数。就是说，正偶数集 E 的任何一个元素都是自然数集 N 的一个元素。

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集。记作

$A \subseteq B$（或$B \supseteq A$）。

读作“A 包含于 B”（或 B 包含 A）。例如，上述的

$E \subseteq N$。

如果 A 中至少有一个元素不属于 B，那么 A 不是 B 的子集，可记作

$A \nsubseteq B$ 或($B \nsupseteq A$)。

读作“A 不包含于 B”（或“B 不包含 A”）。

例 3　设 A＝｛1，3，4，5，8，9｝，B＝｛1，2，3，5，6｝，C＝｛1，5｝。指出集合 A、B、C 之间的关系。

解：因为集合C的元素1和5都是集合A的元素，所以$C \subseteq A$。同理$C \subseteq B$。

因为 B 中的元素 2 和 6 不属于 A，所以 $B \nsubseteq A$。同理$A \nsubseteq B$。

注意：包含“$\subseteq$”和属于“$\in$”不同，前者用来表示集合与集合间的关系，后者用来表示元素与集合间的关系。

对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合 A 本身，所以

$$A \subseteq A$$

也就是说，任何一个集合是它本身的子集。

为了方便起见，我们把不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$，例如。

$\{x \mid x+1=x+2\}=\varnothing$。

{小于零的自然数}＝$\varnothing$。

{两边之和小于第三边的三角形}＝$\varnothing$。

我们规定空集是任何集合的子集，也就是说，对于任何集合 A，有

$$\varnothing \subseteq A$$

注意：不要把数 0 或集合｛0｝与空集$\varnothing$混淆。数 0 不是集合，｛0｝是含有一个元素的集合，而$\varnothing$是不含任何元素的集合。在书写时，不要把空集错误地写成｛空集｝或｛$\varnothing$｝，后者不是空集，是一个单元素的集合，它的元素是$\varnothing$。

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作

$$A \subset B（或 B \supset A），$$

读作“A 真包含于 B”（或“B 真包含 A”）。

例如，偶数集 E 是自然数集 N 的子集，也是它的真子集，所以 $E \subset N$。

集合 B 同它的真子集 A 之间的关系，可用图 11－1 中 B 同 A 的关系来说明。其中 A、B 两个圈的内部分别表示集合 A、B。这种表示集合的图形通常称作文氏图。

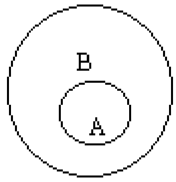


图11—1

显然，空集是任何非空集合的真子集。

对于两个集合 A 与 B，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，我们就说这两个集合相等。记作

$$A = B$$

读作“A 等于 B”。两个集合相等，实际上就是这两个集合的元素完全相同。

4．并集

向群百货商店，第一批进的货是服装、皮鞋、毛毯、化妆品共 4 个品种。第二批进的货是收录机、服装、皮鞋、尼龙袜、钟表、电冰箱共 6 个品种。问两次一共进了多少个品种的商品，能不能回答一共进了 4＋6＝10 种呢？显然不能。因为在这两批进货中服装和皮鞋是重复的。因此，两次进货共 8 个品种。

在这个问题中，我们研究的是两个集合元素的合并，而不是普通数的加法。如果用 A_1 表示第一批进货的品种的集合，用 A_2 表示第二批进货的品种的集合，即

A_1＝｛服装，皮鞋，毛毯，化妆品｝，

A_2＝｛收录机，服装，皮鞋，尼龙袜，钟表，电冰箱｝。把合并起来的货物品种集合记为 B，那么

B＝A_1 和 A_2 的合并

＝｛收录机，服装，皮鞋，毛毯，化妆品，尼龙袜，钟表，电冰箱｝。

一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的并集，记作 $A \cup B$。符号“∪”读作“并”。“$A \cup B$”读作“A 并 B”。即

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$。图 11－2 中的阴影部分，表示 A、B 的并集 $A \cup B$。

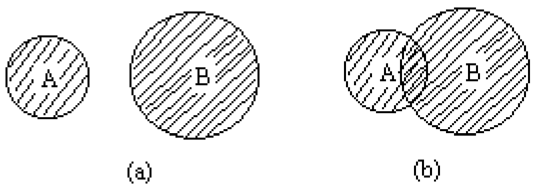


图11—2

注意，由于集合中的元素是不重复的，因此，在求两个集合的并集时，这两个集合的公共元素在并集中只能出现一次。

由并集定义容易知道，对于任意集合 A、B，有

A∪A＝A，A∪∅＝A，A∪B＝B∪A。

5．交集

已知 6 的约数的集合为

A＝｛1，2，3，6｝，

15 的约数的集合为

B＝｛l，3，5，15｝。

那么 6 与 15 的公共约数的集合为

｛1，3｝。

容易看出，集合｛1，3｝是由所有属于 A 且属于 B 的元素（即 A、B 的公共元素）所组成的。

一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的交集，记作 A∩B。符号“∩”读作“交”，“A∩B”读作“A 交 B”。即

A∩B＝｛x｜x∈A 且 x∈B｝。

这样，6 与 15 的公共约数的集合，可以从求 6 的约数的集合与 15 的约数的集合的交集而得到，即

A∩B＝｛1，2，3，6｝∩｛1，3，5，15｝＝｛1，3｝。

图 11－3 中的阴影部分，表示集合 A、B 的交集 A∩B。

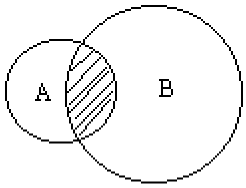


图11—3

由交集的定义容易推出，对于集合 A、B，有

A∩A＝A，A∩∅＝∅，A∩B＝B∩A

例 4　已知 A＝｛x｜x≥3｝，B＝｛x｜x＜6｝，C＝｛x｜x＞8｝。求 A∩B，B∪C，B∩C。

解：A∩B＝｛x｜x≥3｝∩｛x｜x＜6｝

＝｛x｜3≤x 且 x＜6｝

＝｛x｜3≤x＜6｝

B∪C＝｛x｜x＜6｝∪｛x｜x＞8｝

＝｛x｜x＜6 或 x＞8｝

B∩C＝｛x｜x＜6｝∩｛x｜x＞8｝

＝｛x｜x＜6 且＞8｝

＝∅

说明：符号“＜”、“＞”分别读成“小于”和“大于”，例如，x＜6 表示 x 是小于 6 的（实）数,X≥3 表示 X 是大于或等于 3 的（实）数。

例 4 解中的数集也可以表示在数轴上，参看图 11－4，图（a）中打有斜线的区域表示集合 A∩B，图（b）中打有斜线的部分表示 B∪C。

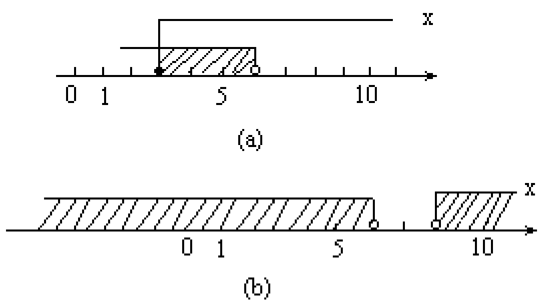


图11—4

例 5　在某校全体学生的集合中，已知 A＝｛六年级学生｝，B＝｛五年级学生｝，C＝｛女学生｝，D＝｛男学生｝，E＝｛参加数学小组活动的学生｝，F＝｛游览长城的学生｝。将下列各句子用集的符号表示出来。

（l）六年级全体女生都参加了数学活动。

（2）五、六年全体学生也仅是这些学生游览了长城。

（3）五年级的男生都没有参加数学小组活动。

解：（1）$A\cap C\subseteq E$，（2）$A\cup B=F$，

（3）$A\cap D\cap E=\varnothing$。

习题十一

1．用适当的符号（$\in$，$\notin$，$=$，$\subset$，$\supset$）填空：

（1）a______ ｛a｝；

（2）a______ ｛a，b，c｝；

（3）d______ ｛a，b，c｝；

（4）｛a｝______ ｛a，b，c｝；

（5）｛a，b｝______ ｛b，a｝；

（6）｛3，5｝______ ｛1，3，5，7｝；

（7）｛2，4，6，8｝______ ｛2，8｝；

（8）$\varnothing$______ ｛1，2，3｝

2．写出集合｛1，2，3｝的所有的子集及真子集。

3．已知 A＝｛a，b，c，d，f｝，B＝｛b，d，e｝，c＝｛a，b，g｝，求：$A\cup B$，$A\cap B$，$A\cup B\cup C$，$A\cap B\cap C$。

4．已知 A＝｛x｜x＞9｝，B＝｛x｜x≤12｝，C＝｛9，10，15｝。求：$A\cap B$，$A\cup C$，$B\cap C$

5．已知 A＝｛x｜x 是 3 的倍数｝，B＝｛x｜x 是 4 的倍数｝，C＝｛x｜x 是 9 的倍数｝试求

$A\cap B$，$A\cup B$，$A\cup C$，$A\cap C$。

第十二讲　简易逻辑问题（一）

“数学是锻炼思维的体操”。思维是大脑对事物的性质、它们之间的关系的认识过程。因为客观事物不是孤立存在的，是互相关联、互相影响的，往往具有某种因果关系，所以思维使我们能够知道并没有直接感觉到的事物，预见事情的进程和发展结果。就是从一些已知事实，推断出一些合理的结论。

正确的思维，应该是确定的，首尾一贯的，无矛盾的和有根据的。“逻辑”就是思维的规律。本讲讨论的“逻辑问题”，主要是判断推理问题。

例 1　现有红、黄、蓝、白、紫五种颜色的珠子各一颗，用纸包着，在桌子上排成一行，由甲、乙、丙、丁、戊五人，猜各包内珠子的颜色，每人只许猜两包。

甲猜：第二包是紫的，第三包是黄的；

乙猜：第二包是蓝的，第四包是红的；

丙猜：第一包是红的，第五包是白的；

丁猜：第三包是蓝的，第四包是白的；

戊猜：第二包是黄的，第五包是紫的。

事后，打开纸包，发现每人都只猜对了一包，并且每包都只有一人猜对。问他们各猜对的是哪一种颜色的珠子。

解：根据题意我们列一个表：

	一	二	三	四	五
甲		紫	黄		
乙		蓝		红	
丙	红				白
丁			蓝	白	
戊		黄			紫

因为每包都只有一人猜对，第一包只有丙猜，所以丙猜第一包是红的猜对了。又因为每人只猜对一包，因此页第五包猜错了；而第五包由丙、戊两人猜，戊猜对了第五包是紫的。

由于第一包是红的，第四包只能是白的，因此，丁猜对了第四包，甲猜对了第三包。

甲、戊都猜错了第二包，只有乙猜对了第二包是蓝的。综上所述，甲猜对了第三包是黄的，乙猜对了第二包是蓝的，丙猜对了第一包是红的，丁猜对了第四包是白的，戊猜对了第五包是紫的。

说明：由于第一包只有一人猜，一定是猜对了。因此，确定第一包的颜色，是解决这道题的突破口。解决问题，找到突破口是很重要的。用“列表方法”把繁杂的条件更加条理化，是解决“罗辑问题”的有效手段。

例 2　刘毅、马明、张健三个男同学都各有一个妹妹，六人在一起举行乒乓球混合双打练习。规定兄妹不许搭伴。第一盘是刘毅和小萍对张健和小英；第二盘是张健和小红对刘毅和马明的妹妹。推断刘毅、马明、张健的妹妹各是谁？

解：先列表分析，非兄妹关系画“×，兄妹关系画“√”，暂不能肯定

画“？”。

兄＼妹	小萍	小英	小红
刘毅	×	?	?
马明	×	?	?
张健	√	×	×

由表中可看出张健的妹妹是小萍。刘毅、马明的妹妹分别是谁只有两种可能：

第一，刘毅的妹妹是小英，马明的妹妹是小红。第二，刘毅的妹妹是小红，马明的妹妹是小英。

对第一种可能，第二盘练习就是张健和小红对刘毅和小红（马明的妹妹）。不合理。对第二种可能，第二盘练习就是张健和小红对刘毅和小英。合理。

综合以上推断，刘毅的妹妹是小红，马明的妹妹是小英，张健的妹妹是小萍。

说明：本题推断过程中，对可能的两种情况，进行一一检验，排除不合理的情况，肯定合理的情况。这是采用了“穷举法”。下面我们用穷举法再讨论一道题。

例 3　王红、李智、张慧三名同学中，有一人在教室没其他同学的时候，把教室打扫得干干净净。事后，老师问他们三人，是谁做的好事。王红说：“是李智干的”；李智说：“不是我干的”；张慧也说：“不是我干的”。后来知道他们三人中，有两人说的是假话，有一人说的是真话。你能断定教室是谁打扫的吗？

解：由题意知只有三种可能，

如果是王红干的，那么王红说的“是李智干的”是假话；李智说的“不是我干的”是真话；张慧说的“不是我干的”也是真话。不符合题意中“两假一真”条件。

如果是李智干的，那么王红说的“是李智干的”是真话；李智说的“不是我干的”是假话；张慧说的“不是我干的”是真话。也不符合“两假一真”条件。

只能是张慧干的。这样王红、张慧说的是假话，李智说的是真话。符合“两假一真”。

例 4　A、B、C、D、E 五个球队进行单循环赛（每两个队之间都要比赛一场），进行到中途，发现 A、B、C、D、比赛过的场次分别是 4，3，2，1。问这时 E 队赛过几场？E 队和哪个队赛过？

解：用图 12－1 表示各队之间是否比赛过。用平面上的点表示 A、B、C、D、E 队，两队比赛过，用两点连线表示，没有比赛过，则不连线。

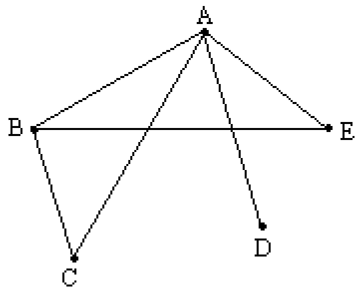


图12—1

A 赛过 4 场，A 与 B、C、D、E 均连线；B 赛过三场，除与 A 赛过，还赛过 2 场，因为 D 只赛过 1 场（和 A 队赛），因此 B 只能和 C、E 赛过；这样正好符合 C 赛过 2 场，D 赛过 1 场。由图看出这时 E 队赛过 2 场，E 队和 A、B 队赛过。

解法二：因为比赛一场，双方各计一次，因此，比赛过程中任何阶段，各队比赛的场次数总是偶数。A，B，C，D 的场次数之和是 4＋3＋2＋1＝10，是偶数，这时 E 赛过场次数一定也是偶数，有三种可能：0，2，4，因为 A 赛过 4 场，一定和 E 赛过。E 不可能赛 0 场；又 D 只赛过一场，和 A 赛过，还没和 E 赛过，E 不会赛过 4 场。只能是赛过 2 场。E 和 A 赛过，B 赛过 3 场，而 B 和 D 没赛过，B 一定和 E 赛过。

综合以上分析，E 赛过 2 场，和 A、B 各赛一场。

说明：用图表示所研究对象及其关系，是讨论逻辑问题的又一个重要手段。用点表示所研究对象，用连线表示对象之间的某种关系。充分利用图形的直观性，便于说明问题。

例 5　老师要从甲、乙、丙、丁四名同学中选派两人去参加某项活动，征求他们的意见，甲说：“我服从分配”；乙说：“如果甲去，那么我就去”；丙说：“如果我不去，那么乙也不能去”；丁说：“我和甲，要去都去，要不去就都不去”。老师要都满足他们的要求，应选派谁去？

分析：我们把命题“如果具有条件 A，那么就有结论 B，”表示成：A⇒B，符号“⇒”读作“推出”。根据题意老师应满足的条件是：

甲⇒乙（乙说），丙非⇒非乙，（丙说）这句话相当于乙⇒丙，甲⇔丁（丁说）。把这些关系联系起来，很容易得出结论。

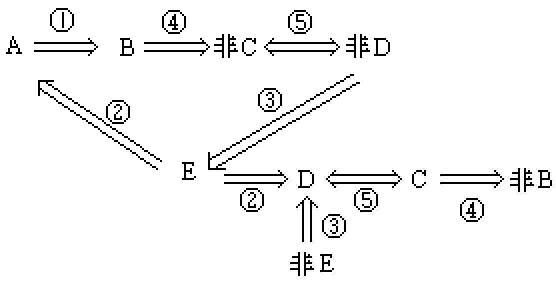
解　题目所要求的条件如下：

甲 ⇒ 乙 ⇒ 丙
χ
丁

显然，如果甲去或乙去，按条件四人都得去。不符合只派两人去的要求。所以甲、丁不去，派乙、丙二人去参加符合题意。

例 6　某参观团根据下列条件从 A、B、C、D、E 五个地方选定参观地点：①若去 A 地，也必须去 B 地；②若去 E 地，A、D 两地也必须去；③D、E 两地至少去一地；④B、C 两地只去一地；⑤C、、D 两地都去或都不去。问参观团最多去哪几个地方？

解：用符号⇒表示题意得，



从以上用符号“⇒”所表示的逻辑关系可以看出，如果去 E 或去 A 或去 B，都推出非 D 且 D。（既去 D 地，又同时不能去 D 地）矛盾。因此 A、B、E 三个地方不能去。

去 C、D 两地，与题意不矛盾。所以参观团最多可以去 C、D 两地。

说明：用推出符号“⇒”表示题目中的逻辑关系，是很简明的。解题中经常练习使用是大有益处的。

习题十二

1．地理课上，老师挂出一张空的中国地图，其中有五个省分别编上了 1～5 号。让大家写出每个编号是哪一省。A 答：2 号是陕西，5 号是甘肃；B 答：2 号是湖北，4 号是山东；C 答：1 号是山东，5 号是吉林；D 答：3 号是湖北，4 号是吉林；E 答：2 号是甘肃，3 号是陕西。这五名同学每人都只答对了一个省，并且每个编号只有一人答对，问 1～5 号各是哪个省？

2．在甲、乙、丙三人中，有一位教师，一位工人，一位战士。知道丙比战士年龄大，甲和工人不同岁，工人比乙年龄小。请你推断谁是教师？谁是工人？谁是战士？

3．田径场上进行百米决赛，参加决赛的有 A、B、C、D、E、F 六个人。对于谁是冠军，看台上甲、乙、丙、丁四人有以下猜测：

甲说：“冠军不是 A 就是 B。”

乙说：“冠军不是 C。”

丙说：“D、E、F 都不可能是冠军。”

丁说：“冠军是 D、E、F 中的一人。”

比赛后发现，这四人中只有一人的猜测是正确的。你能断定谁是冠军吗？

4．五年级的 1，2，3，4 班举行接力比赛，请甲，乙，丙三位小朋友猜测四个班的比赛名次：

甲说：“我看 1 班只能得第三，3 班是冠军。”

乙说：“3 班只能得第二，至于第三，我看是 2 班。”

丙说：“4 班第二，1 班第一。”

比赛结束后发现，三人的预测都只对了一半。请你判断四个班的名次。

5．某学校召开田径运动会，五名运动员赛跑，赛后有五名观众介绍比赛结果：

第一人说：A 是第二，B 是第三；

第二人说：C 是第三，D 是第五；

第三人说：D 是第一，C 是第二；

第四人说：A 是第二，E 是第四；

第五人说：B 是第一，E 是第四。

介绍后，他们都补充说“我的话半真半假”。请你判断五名运动员的名次。

6．有三个箱子，分别涂上红、黄、蓝三种颜色，一个苹果放入其中某个箱子里。

①在红箱子盖上写着：“苹果在这只箱子里”；

②在黄箱子盖上写着：“苹果不在这只箱子里”；

③在蓝箱子盖上写着：“苹果不在红箱子里”。

已知以上三句话中，只有一句是真的。问苹果在哪个箱子里？

第十三讲　两个计数原理

在日常生活和生产实践中要经常遇到排队、分组的有关计数问题。例如，有 4 名学生与 1 位老师排成一排照相，如果老师必须站在中间，问有多少种排法？某条航线上共有 6 个航空站，这条航线上共有多少种不同的飞机票？如果不同的两站间票价都不同，那么有多少种不同的票价？这种计数问题都涉及到两个基本原理：乘法原理和加法原理。下面我们就来讨论这两个基本原理。

1．乘法原理

先看一个例子。

例 1　从甲地到乙地有 2 条路可走，乙地到丙地又有 3 条路可走。问从甲地经乙地到丙地，可以有多少种不同的走法？

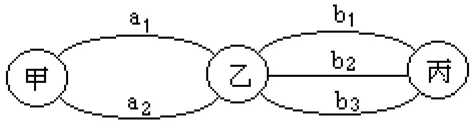
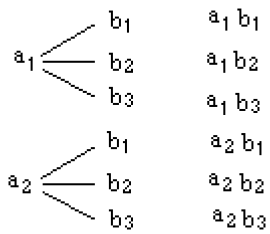


图13—1

分析与解：如果用 a_1，a_2 表示从甲地到乙地的两条路，用 b_1，b_2，b_3 表示从乙地到丙地的三条路（图 13－1）。从图中可以看出，从甲地经乙地到丙地共有以下 6 种走法：



解这个问题可以分成两个步骤来考虑：第一步，先从由甲地到乙地的两条路中任意选一条（有 2 种选法；第二步，再从乙地到丙地的三条路中任意选一条（有 3 种选法），相互搭配后，共有六种不同走法，正好是每一步骤的选法种数（2 与 3）的乘积。

这个具体问题的解法，给了我们一个重要的启示：如果撇开这里所说的“从甲地到乙地”，“从乙地到丙地”这些具体内容，而把它们一般地看成要完成一件事的两个步骤，并且把这里所说的“有 2 条路”，“有 3 条路”一般地说成“有 m_1 种方法”，有 m_2 种方法”。这样，就可以得到如下结论：

如果做一件事需要分两个步骤进行，做第一步有 m_1 种不同方法，第二步有 m_2 种不同方法，那么完成这件事共有

$N=m_1\times m_2$ 种不同的方法。

更一般地，还可得出这样的结论：

如果做一件事需要分 n 个步骤进行，做第一步有 m_1 种不同方法，做第二步有 m_2 种不同方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同方法，那么完成这件事共有

$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同方法。

我们把上面这个结论叫做乘法原理。

例 2　一天中午，某学生食堂供应 4 种主食、6 种副食。小李到食堂吃

饭，主、副食各选一种，问他有多少种不同的选法？

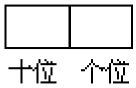
分析与解：我们把一种主食与一种副食的搭配看成一种选法。完成这件事可分两步进行：第一步选主食，有 4 种方法：第二步选副食，有 6 种方法，根据乘法原理，小李共有 4×6＝24 种不同的选法。

例 3　用 1，2，3，4 这四个数字

（l）可以组成多少个两位数？

（2）可以组成多少个没有重复数字的两位数？

分析与解：（1）我们把组成 1 个两位数看成是在排好顺序的两个位置



上分别填上两个数字。第一步可以从 1，2，3，4 这四个数中任选一个填在十位上，有 4 种不同的方法；第二步同样可以从 1，2，3，4 中任选一个填在个位上（数字允许重复，例如，22 也是符合条件的两位数），也有 4 种不同的方法。根据乘法原理，用 1，2，3，4 这四个数字可以组成

$$4\times4=16$$

个两位数。它们是

11，12，13，14

21，22，23，24，

31，32，33，34，

41，42，43，44。

（2）采用与例 3（1）相同的分析方法，第一步可以从 1，2，3，4 这四个数字中任选一个填在十位上，有 4 种不同方法；第二步。由于数字不能重复，所以只能从剩下的三个数字中任选一个填在个位上，有 3 种不同方法。根据乘法原理，用 1，2，3，4 这四个数字可以组成

$$4\times3=12$$

个没有重复数字的两位数。

2．加法原理

例 4　从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘轮船，还可以乘飞机。在一天中，从甲地到乙地有 4 班火车，2 班轮船，1 班飞机。那么在一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地，共有多少种不同的走法？

分析与解：我们把乘坐不同班次的火车、轮船或飞机称为不同的走法。因此，从甲地到乙地乘火车有 4 种走法，乘轮船有 2 种走法，乘飞机有 1 种走法。由于每一种走法都能从甲地到达乙地，所以一天中从甲地到乙地共有

$$4+2+1=7$$

种不同的走法。

同样，我们可以从这个问题的解答中得到启示，作出如下的一般结论：

如果完成一件事有 n 类办法，只在选择任何一类办法中的一种方法，这件事就可以完成。又已知在第一类办法中有 m_1 种不同方法，在第二类办法中有 m_2 种不同方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同方法，那么完成这件事共有

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法。

我们称这一结论为加法原理。

例 5　书架上有 6 本故事书，5 本画报，7 本科普读物，

（l）小芳从书架上任取一本，有多少种不同取法？

（2）小芳从这三种书籍中各取一本，有多少种不同取法？

分析与解：（l）小芳从书架上任取一本书有三类办法，第一类办法是从故事书中任取一本，可以有 6 种不同取法；第二类办法是从画报中任取一本，可以有 5 种不同方法；第三类办法是从科普读物中任取一本，可以有 7 种不同方法。根据加法原理，小芳任取一本共有

$$6+5+7=18$$

种不同取法。

(2) 小芳要取三本不同种类的书，完成这件事可以分三步进行。第一步，取一本故事书，有 6 种方法；第二步，取一本画报，有 5 种方法；第三步，取一本科普读物，有 7 种方法。根据乘法原理，完成这件事共有

$$6\times5\times7=210$$

种不同的方法。

例 5　说明，在这类计数问题中，要注意区分运用乘法原理与加法原理的不同条件。在有些问题中，这两个基本原理还要结合起来使用。

例 6　如图 13－2，从甲地到乙地有 4 条不同的道路，从乙地到丙地有两条不同的道路，从甲地到丙地有 3 条不同的道路，问从甲地到丙地共有多少种不同走法？

分析与解：完成从甲地到丙地这件事，有两类办法。第一类办法是从甲地经乙地到达丙地，这类办法可以分两步进行：第一步从甲地到乙地，有 4 种走法；第二步从乙地到丙地，有两种走法。根据乘法原理，这类办法共有 $4\times2=8$ 种不同方法。第二类办法是从甲地直接到达丙地，有 3 种不同走法。再根据加法原理，从甲地到达丙地共有

$$4\times2+3=11$$

种不同走法。

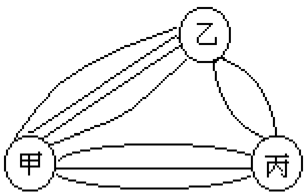


图13—2

3．例题分析

例 7　（1）有 5 个人排成一排照相，有多少种排法？

（2）5 个人排成一排照相，如果某人必须站在中间，有多少种排法？

分析与解：（1）5 个人排成一排，从左到右共 5 个位置。第一个位置可从 5 个人中任选 1 人，有 5 种选法；第二个位置只能从剩下的 4 人中任选 1 人，有 4 种选法。同理，第三、第四、第五个位置分别有 3 种、2 种、1 种选法。每个位置上站了一人就是一种排法。根据乘法原理，共有

$$5\times4\times3\times2\times1=120$$

种排法。

（2）这里，限定某人必须站在中间，他的位置固定了，而其余 4 人可以

任意站位。仿照（1）中的分析可知共有

$$4\times3\times2\times1=24$$

种排法。

说明：自然数 1 到 n 的连乘积叫做 n 的阶乘，用 n！表示。例如 5！＝1×2×3×4×5，4！＝1×2×3×4。于是，例 7 中的两个式子可简写作 5！＝120，4！＝24。

例 8　某条航线上共有 8 个航空站，这条航线上共有多少种不同的飞机票？如果不同的两站间票价都不同，那么有多少种不同的票价？

分析与解：每一种飞机票可看作起点在前、终点在后两城市间的顺序排列。第一步，确定起点城市，有 8 种选法；第二步确定终点城市，当起点选定后，终点只有 7 种选法。根据乘法原理，共有

$$8\times7=56$$

种不同的排列方法。因此，这条航线上需要准备 56 种不同的飞机票。

由于两个城市按照起点在前、终点在后的顺序排列有 2 种，所以有两种飞机票。而它们的票价是一样的。因此，这条航线上应有 56÷2＝28 种不同的票价。

说明：从 n 个不同的元素中，任取 m（m≤n）个不同元素，按照一定的顺序排成一排，叫做从 n 个不同的元素中取 m 个不同的元素的一个排列。所有排列的种数叫做排列数。例 8 中求飞机票种数问题，就是求从 8 个不同元素中，任取两个不同的元素的排列种数问题，一般可以运用乘法原理来求排列数。

例 9　用 0，l，2，3 这四个数，可以组成多少个没有重复数字的四位数？

解法一：一个四位数可以看作是四个数字的一个排列。由于“0”不能作千位数，所以千位数只能从 1，2，3，这三个数中任取一个，有 3 种选法。再考虑到没有重复数字这一条件，百位、十位、个位三个位置分别有 3 种、2 种、1 种选法。根据乘法原理，可以组成

$$3\times3\times2\times1=18$$

个没有重复数字的四位数。

解法二：如果把数字 0，1，2，3 全部取出来排列，根据乘法原理，共有

$$4\times3\times2\times1=24$$

种不同的排列。其中“0”在千位上的排列（这种排列不能看成四位数）有

$$3\times2\times1=6$$

种。所以符合条件的四位数就是

$$24-6=18（个）$$

例 10　现有红、黄、蓝三种颜色的小旗各一面，用它们挂在旗杆上作信号（顺序不同时表示的信号也不同），总共可以作出多少种不同信号？

分析与解：作出的信号可以按照挂出的小旗面数分成三类：

（l）只有一面小旗作信号，这样作出的信号有 3 种；

（2）用二面小旗作信号，由乘法原理，作出的信号有 3×2＝6 种；

（3）用三面小旗作信号，由乘法原理，作出的信号有 3×2×1＝6 种。

根据加法原理，总共可以作出

3＋6＋6＝15 种不同的信号。

习题十三

1．有 6 名同学参加象棋决赛，得冠军和亚军的名单有几种可能的情况？

2．一个口袋装有 6 个小球，另一个口袋装有 5 个小球，所有小球的颜色都不相同。

（1）从两个口袋中任取一个小球，有多少种不同的取法？

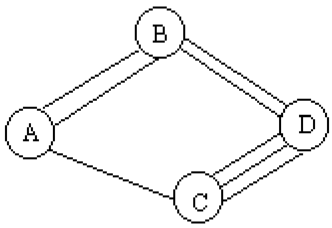
（2）从两个口袋中各取一个小球，有多少种不同的取法？

3．某市电话号码是五位数，每一数位上的数码可以是 0，l，2，…8，9 中的任意一个（数字可以重复出现，如 00000 也算一个电话号码）那么这个城市最多有多少个电话号码？

4．在“希望杯”足球赛中，共有 27 支小足球队参赛。

（l）如果这 27 个队进行单循环赛（两队间只比赛一次，称作一场），需要比赛多少场？

（2）如果这 27 个队进行淘汰赛，最后决出冠军，共需比赛多少场？



5．如上图，从 A 地到 B 地有两条路；从 B 地到 D 地有两条路；从 A 地到 C 地只有一条路；从 C 地到 D 地有 3 条路。那么从 A 地到 D 地有多少种不同走法？

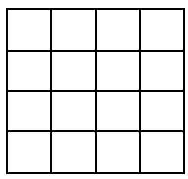
6．5 件不同的商品陈列在橱窗内，排成一排。

（1）如果某件商品不放在中间，有几种不同排法？

（2）如果某件商品不能放在两端，有几种不同排法？

7．有四封不同的信，随意投入三个信筒里，有多少种不同投法？

8．下图中共有 $4\times4=16$ 个小方格，要把 A，B，C，D 四个不同的棋子放在方格里，每行和每列只能出现一个棋子，共有多少种放法？



第十四讲　抽屉原则（一）

一、什么是抽屉原则

我们先看下面一副妙趣横生的漫画。这幅画出于一位数学家之手，它曾刊登在一种著名数学杂志的封面上，画里表示三只鸽子要进两个鸽巢。想一想，可能会产生什么样的结果呢？要么两只鸽子进了一个巢，而另外一只鸽子进了另一个巢；要么三只鸽子都进了一个巢。这两种情况可用一句话表示：一定有一个巢里有两只或两只以上的鸽子。虽然哪个巢里至少有两只鸽子我们无法断定，但这是无关紧要的，重要的是有这样一个巢，其中进来了两只或两只以上的鸽子。

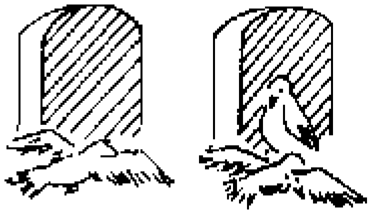


图14—1

如果我们把上面问题中的数字作一下改变，例如不是三只鸽子进两个巢，而是十只鸽子进九个巢，那么结果怎样呢？我们不难理解，这十只鸽子不管以怎样的方式进巢（假定每一个巢都相当大，可以容纳全部鸽子），仍然是一定有一个巢里至少有两只鸽子。

上面推理的正确性是显而易见的，就连小学生也是完全能够接受的。怎样把这一问题推广到更一般的形式，从而得出某种基本原理来呢？我们先看以下两点：

（1）如果将鸽子换成苹果、糖果、书本或数，同时将鸽巢相应地换成抽屉、小孩、学生或数的集合，仍然可以得到相同的结论。

这就是说，上面推理的正确性与具体事物没有关系。如果我们把一切可以与鸽子互换的事物叫作元素，而把一切与鸽巢互换的事物叫作集合，那么上述结论就可以这样叙述：十个元素以任意的方式分到九个集合之中，一定有一个集合中至少有两个元素。

（2）鸽子与鸽巢的数目也是无关紧要的，只要鸽子数比鸽巢数多，推理照样成立。

通过这两点分析，我们可以把上面问题中所包含的基本原理写成下面的一般形式：

原则 1　如果把多于 n 个的元素按任一确定的方式分成 n 个集合，那么一定有一个集合中至少含有两个元素。

也许是由于上面那幅漫画的缘故，有人把这一原则称作鸽巢原则。又有人把鸽子进入鸽巢比作苹果放进抽屉里，所以通常也称作抽屉原则。以下我们采用抽屉原则这一称呼。初看起来，有人会觉得这一原则太简单了，简直平淡无奇。然而正是这样一些平凡朴素的原则，在初等数学乃至高等数学中，有着许多应用。巧妙灵活地运用这些原则，可以很顺利地解决一些看上去相

当复杂，甚至觉得简直无法下手的数学问题。[1]

下面我们先看看，如何运用这一原则解决日常生活中的一些有趣的问题。

例 1　某校一年级招收了四百名新生，而年龄最大的与最小的相差不到一周岁。那么这些新生中一定有两个人是同年、同月、同日出生的。你知道为什么吗？

分析：也许有同学会说，新生入学登记的卡片上有每个同学的出生年、月、日，只要把全部新生的卡片查一下就知道了。如果我们规定不能查这些卡片，那么该怎么办呢？其实完全没有必要看这些登记表，只要把一年中的每一天看作一个抽屉，而把每一个新生的生日看作“苹果”，运用抽屉原则就可以解决。

证明：把一年中的三百六十五天（闰年三百六十六天）中的每一天看作一个抽屉，把四百名新生的每一个人的生日看成一个“苹果”，由于“苹果”数目多于“抽屉”数目，根据抽屉原则，一定有一个抽屉里至少有两个“苹果”。也就是说，至少有两个同学的生日相同。再根据同学们的年龄相差不到一周岁，所以这两个同学一定是同年、同月、同日出生的。

说明：从上面的例子可以看出运用抽屉原则解题，一定要恰当地选好“抽屉”和“苹果”。

例 2　某小学有一千多名学生，从学生中任意挑选 13 人，证明在这 13 名学生中至少有两个人属相相同。证明：属相一共有 12 种，设 12 种属相为 12 个“抽屉”，而把 13 名学生当作 13 个“苹果”。当“苹果”放入“抽屉”后，根据抽屉原则，有一个“抽屉”里至少放了两个“苹果”，也就是说至少有两个人的属相相同。

例 3　六年级（1）班有 40 名学生，班里有个小书架，同学们可以任意借阅，试问小书架上至少要有多少本书，才能保证至少有一个同学能借到两本或两本以上的书？

解：把 40 名学生当作 40 个“抽屉”，而把书当作“苹果”，根据抽屉原则，“苹果”数目要比“抽屉”数目大，才能保证至少有一个“抽屉”里有两个或两个以上的“苹果”。因此，小书架上至少要有 41 本图书，才能保证至少有一个同学能借到两本或两本以上的图书。

说明：例 3 是运用抽屉原则来求“苹果”或元素的个数的。

以上三个例题中有关“抽屉”和“苹果”的选择比较简单。但在很多情况下，“抽屉”和“苹果”并非如此明显，一下子就能选好，而是要认真地分析思考才能找到“抽屉”和“苹果”。有时“抽屉”和“苹果”的数目也不是现成的，需要通过分析，才能计算得到。

例 4　黑色、白色、黄色的筷子各有 8 根，混杂地放在一起，黑暗中想从这些筷子中取出颜色不同的两双筷子（每双筷子两根的颜色应一样）。问至少要取多少根才能保证达到要求？（首届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛初赛试题）

解：例 4 不能像前 3 个例题那样一下子就找到了“抽屉”和“苹果”，从而直接运用抽屉原则来解决问题。解这个问题时需作认真的思考和分析。

---

[1] ① 据说 19 世纪著名的德国数学家狄里克雷最早明确地运用这一原则明了数论中的一些命题。后来，人们为了纪念他，把抽屉原则也称作狄里克雷重叠原则。

由于各种颜色的筷子混杂在一起，我们又是在黑暗中取筷子，取时无法分辨出筷子的颜色。这样，如果取出的筷子数目不多于 8 根的话，有可能取出的筷子都是同一种颜色，这是最不利的情况。因此，要保证取出颜色不同的两双筷子，取出的筷子数必须超过 8 根。为了保证达到要求，我们从最不利的情况出发，取出的筷子中有 8 根都是同一种颜色的，这样问题就变成了怎样才能使其余的筷子中保证有两根颜色是同颜色的。这时，剩下的颜色只有两种，把两种颜色当作两个“抽屉”，而把筷子当作“苹果”，根据抽屉原则，只要再有 3 根筷子，就能保证其中有两根的颜色是相同的。总之，在最不利的情况下，只要取出 8＋3＝11 根筷子，就能保证其中一定有不同颜色的两双筷子，在其它情况下就更能达到要求了。

答：至少要取出 11 根筷子才能保证达到要求。

例 5　从起点起，每隔 1 米种一棵树。如果把三块“爱护树木”的小牌分别挂在三棵树上，那么不管怎么挂，至少有两棵挂牌的树，它们之间的距离是偶数（以米为单位）。这是为什么？

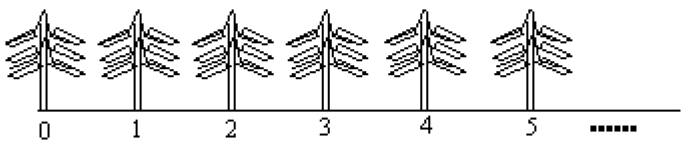


图14—2

证明：为了表示两棵树之间的距离，给每棵树编号（如图 14－2）。这样两棵树的距离数就是这两棵树号码的差。树的号码数分成偶数、奇数两种，把这两种数当作两个“抽屉”，把挂牌的树的三个号码数放进两个“抽屉”里。那么至少有两个在同一个“抽屉”里，即同时偶数或者是奇数。两个偶数或奇数，它们差一定是偶数。所以挂牌的 3 棵树中，至少有两棵，它们之间的距离是偶数。

例 6　能否在 8 行 8 列的方格表（如图 14—3）的每一个空格中分别填上 1、2、3 这三个数字中的任意一个，使得每行、每列及对角线 AC、BD 上的各个数字的和互不相同？并对你的结论加以说明。（北京市 1988 年小学迎春杯数学竞赛决赛试题）

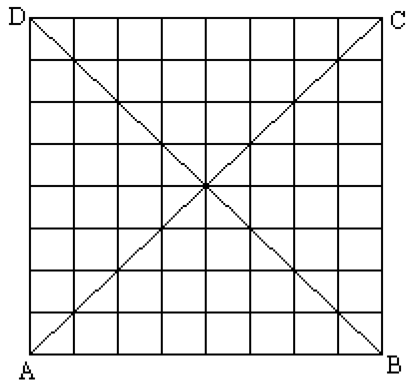


图14—3

解：这个问题初看起来似乎与“抽屉”原则关系不密切。下面我们先看图，图中 8 行 8 列及两条对角线共 18 条“线”。每条“线”上都填有 8 个数字，要使各条“线”上的数字和都不相同，那么每条“线”上数字和取不同值的可能性必须不少于 18 种。下面我们来看各条“线”上取不同和的可能情况有多少种。如果一条“线”上的 8 个数字都填 1，那么数字和为最小值 8；

如果一条“线”上的 8 个数字都填 3，那么数字和为最大值 24。由于数字和都是整数，所以从 8 到 24 共有 17 种不同的值。我们把数字和的 17 种不同的值当作 17 个“抽屉”，而把 18 条“线”当作 18 个“苹果”。根据抽屉原则，把 18 条“线”分到 17 个“抽屉”里，一定有一个“抽屉”里有两条或两条以上的“线”，即 18 条“线”上的数字和至少有两个是相同的。因此，不可能使 18 条“线”上各数字和互不相同。

二、抽屉原则的推广

李敏是光明小学六年级的学生，他的哥哥李聪正在读中学，是市数学奥校的学生。他俩在做一种游戏，哥哥拿出一付扑克牌，对弟弟说道：“你瞧瞧，这是一付扑克牌。我把两张王牌拿走，剩下四种花色共 52 张牌。你任意抽出一些牌，不让我看，只要告诉我牌的张数，我准能说出你手中牌的一个明显的特性，你要回答我这是为什么？”哥哥边说边抽掉了两张王牌放在一边，右手拿着剩下的牌伸到了小敏的面前。

小敏从哥哥手里的牌中抽出了一些牌，数了数说“五张”。

哥哥立即回答：其中至少有两张的花色一样。”

小敏有些不以为然，说道：“这个道理谁不知道，只要把四种花色看作四个“抽屉”，五张牌看作五个“苹果”，苹果数比抽屉数大，根据抽屉原则就可以得出一定有两张或两张以上的牌是同一种花色。”

哥哥用称赞的口气肯定了小敏的回答，并叫小敏继续抽取。小敏又从哥哥手中抽出了四张牌，一共抽出了九张。

哥哥又立即回答说：“至少有三张牌花色相同。”

小敏看了看说：“对！”可是不知道为什么。小敏接着又抽出了八张牌，一共抽出了十七张牌。

哥哥又立即回答说：“至少有五张牌花色相同。”

小敏仔细看了看，又对了。他感到很奇怪，哥哥是怎么猜出来的，他恳求哥哥给他揭穿其中的奥秘。

哥哥思索了一下，慢慢地给小敏讲解了其中的道理。

开始抽出了五张牌，而牌的花色有四种，把花色比作“抽屉”，把牌比作“苹果”，根据抽屉原则，可以得出至少有两张牌是一种花色。小敏对后两种情况不了解，说明小敏以前只学了抽屉原则的最简单形式，抽屉原则还有其它形式。

我们仍旧把花色比作“抽屉”，把牌比作“苹果”。要把九张牌分成四种花色，相当于把九个苹果放入四个抽屉中。要使每个抽屉中苹果数尽可能地少，必须平均分配，这样每个抽屉中先放两个，还剩下一个。再把剩下的一个放到某一个抽屉中，这个抽屉里就有了三个苹果。对于任意的放法，有的抽屉里的苹果数可能要超过三个。所以说有一个抽屉中至少放了三个苹果。上面的意思可用一个简单的数学式子表示为：$9=2\times4+1$。等式右边第一项中乘数 4 表示抽屉数，被乘数 2 加余数 1 得 3，而 3 就是有某一个抽屉中至少放入的苹果数。对于 17 个苹果放入四个抽屉的情形，可表示为 $17=4\times4+1$，也可作类似的分析而得出上面的结论。这就是为什么根据抽出的牌的数目就能立即说出相同花色数的特点的道理。

上面的分析和推理也可以推广到更一般的情形，并且同样把苹果看作元

素，把抽屉看作集合，我们可以得到抽屉原则更一般的形式：

原则 2　如果把多于 m×n 个元素按任一确定的方式分成 n 个集合，那么一定有一个集合中至少含有 m＋1 个元素。

说明：(1) 这个结论的正确性是显而易见的。因为多于 m×n 个元素即最少有 m×n＋1 个元素分到 n 个集合中，如果没有一个集合的元素达到 m＋1 个，也就是每个集合中的元素至多有 m 个，那么 n 个集合的所有元素至多有 m×n 个。这与已知条件矛盾，所以原则 2 的结论是正确的。

(2) 如果元素的个数只有 m×n 个，也按任意确定的方式分成 n 个集合，那么一定有一个集合中至少含有 m 个元素。

(3) 原则 1 可以看作原则 2 当 n＝1 时的特例。有了这一推广，运用抽屉原则就可以解决更多有趣的数学问题了。

例 7　某小学有 1100 名学生，而一年级 (2) 班有 49 名学生。那么可以肯定，这个班至少有 5 人在同一个月出生，而全校至少有 4 人在同一日出生（年、月可以不相同）

解：我们把一年中的 12 个月看作 12 个“抽屉”把一 (2) 班的 49 名学生看作 49 个“苹果”。由于 49＝4×12＋1，根据抽屉原则 2，一定有一个抽屉里至少放了五个苹果。也就是说，这个班至少有五名同学在同一个月出生（年可以不相同）。

同样的道理，我们可以把一年中的 366 天（一年最多 366 天）看作 366 个“抽屉”，把全校 1100 名学生看作 1100 个“苹果”。由于 1100＞3×360＋1，根据抽屉原则 2，一定有一个抽屉里至少放了四个苹果。也就是说，全校至少有四人在同一日出生（年、月可以不相同）。

例 8　椐信一个人的头发根数不会超过 20 万根。某城市人口一百多万(假设每人都有头发)，证明这个城市中至少有 6 个人的头发根数一样多。

分析：如果你能具体指出张三、李四等六人的头发根数确实相同，问题就解决了。但是要找到这样的六个人几乎是不可能的。因此，我们还是要采用推理的方法。

我们把每一种头发根数看作一个“抽屉”，由于我们假设每人都有头发，这样头发根数可以有 1，2，3……，200000。共有 20 万个抽屉，再运用抽屉原则 2 就不难找到问题的解答了。

证明：把头发根数看作“抽屉”，这样可以得到 20 万个抽屉，并对每个抽屉依次标上 1，2，3，…200000 之中的一个号码。把每个人看作“苹果”，按各人头上的头发根数归入相应编号的一个抽屉，由于一百多万大于 5×20 万，根据抽屉原则 2，这个城市至少有六个人的头发根数是一样多的。

例 9　一个口袋里放有红色、黄色或绿色三种颜色的玻璃球各若干个。现从中任意取出一些球。问至少要取出多少个球，才能保证其中有五个球的颜色是相同的？如果要保证其中六个球或七个球的颜色相同，又各至少应取出多少个球呢？

解：把红色、黄色、绿色三种颜色看作三个“抽屉”，把取出的球看作“苹果”。要保证有五个球的颜色相同，也就是要保证有一个抽屉里有五个苹果。根据抽屉原则 2，取出的球应多于 4×3 个。即至少应取出 13 个球，才能保证其中有五个球的颜色相同。

其余两问留给读者作为练习。

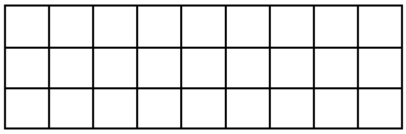
习题十四

1．设 a_1，a_2，…a_{10} 这 10 个数都是大于 0 而小于 1 的数。证明其中一定能找到两个数，使得大的数减去小的数之差不超过 $\frac{1}{9}$。

2．从 13 个自然数中，一定可以找到两个数，它们的差是 12 的倍数。

3．在一条长 100 米的小路一旁植树 101 棵，不管怎样种，总有两棵树的距离不超过 1 米。为什么？

4．下图是一个 3 行 9 列共 27 个小方格的长方形。将每个小方格涂上红色或蓝色。证明：不论如何涂色，其中必定至少有两列，它们的涂色方式相同。



5．一个幼儿班有 40 名小朋友，现在有各种玩具 125 件。把这些玩具分给小朋友，是否有人会得到 4 件或 4 件以上的玩具。

6．袋子里装有红色球 80 个，蓝色球 70 个，黄色球 60 个，白色球 50 个，它们的大小和质量都一样，要保证摸出 10 对球（颜色相同的两个球为 1 对）至少应取多少个球？

第十五讲　应用问题（五）

在应用题的前几讲中，同学们已经学习了如何分析应用题的数量关系，也学习了解答一般应用题，或解答具有一定的解题规律，需用特殊方法解答的应用题的解题方法。有一定的解题规律的应用题大约有十几种，同学们已经掌握了根据“两数的和与差求两数”、“两数的和与倍数关系求两数”、“两数的差与倍数关系求两数”的解题方法。

在日常生活中，人们离不开乘车或走路，这一讲，讲“行程问题”。

解行程问题经常要用到下面的关系式：

路程＝速度×时间

速度＝路程÷时间

时间＝路程÷速度

例 1　慢车从甲地开往乙地，开出 1 小时后，离甲地 40 千米。这时，快车从乙地开往甲地，快车开出 2 小时 30 分后，两车相遇。已知甲、乙两地相距 265 千米，求快车速度。

分析：已知快车开出 2 小时 30 分（2.5 小时）后两车相遇，如果再知道快车 2.5 小时行多少千米，就可以求出快车速度。要求快车行的路程，就要从总路程中减去慢车 1＋2.5＝3.5（小时）所走的路程。

解：（1）慢车共行了多少千米？

40×（1＋2.5）＝140（千米）

（2）快车行了多少千米？

265－140＝125（千米）

（3）快车每小时行多少千米？

125÷2.5＝50（千米）

综合算式：

[265－40×（1＋2.5）]÷2.5

＝125÷2.5

＝50（千米）

答：快车每小时行 50 千米。

例 2　甲乙两地相距 231 千米，一辆摩托车和一辆自行车同时由甲乙两地相向而行，3 小时相遇。已知摩托车的速度是自行车速度的 2.5 倍，摩托车和自行车每小时各行多少千米？

分析：已知甲乙两地相距 231 千米，又知摩托车和自行车同时从两地相向而行，3 小时相遇，就可以求出两车 1 小时共行多少千米（速度和）。题目中又给了摩托车的速度是自行车速度的 2.5 倍，就可以根据“已知两数的和与倍数关系”解答此题了。

解：（1）两车 1 小时共行多少千米？

231÷3＝77（千米）

（2）自行车每小时行多少千米？

77÷（2.5＋1）＝22（千米）

（3）摩托车每小时行多少千米？

22×2.5＝55（千米）

综合算式：

231÷3÷（2.5＋1）

＝77÷3.5

＝22（千米）（自行车速度）

22×2.5＝55（千米）

答：自行车速度是每小时 22 千米，摩托车速度是每小时 55 千米。

例 3　一辆货车上午 8 时从甲地开往相距 540 千米的乙地，每小时行 36 千米，10 时 24 分又有一辆小汽车以每小时 60 千米的速度从甲地开往乙地，几小时后小汽车追上货车，追上时距乙地还有多少千米？

分析：货车以每小时 36 千米的速度先行了 10.4－8＝2.4（小时）后，小汽车才沿原路追货车，货车 2.4 小时所行的距离，就是小汽车要追上的距离。再求出小汽车 1 小时能追上货车的距离（速度差）60－36＝24（千米）就好求了。

解：10 时 24 分＝10.4 小时

（1）货车先行了多少千米？

36×（10.4－8）＝86.4（千米）

（2）小汽车每小时能追上货车多少千米？

60－36＝24（千米）

（3）几小时可以追上？

86.4÷24＝3.6（小时）

（4）小汽车行了多少千米？

60×3.6＝216（千米）

（5）距离乙地还有多少千米？

540－216＝324（千米）

综合算式：

60×[36×（10.4－8）÷（60－36）]

＝60×[36×2.4÷24]

＝60×3.6

＝216（千米）

540－216＝324（千米）

答：3.6 小时后小汽车可以追上货车，追上时距离乙地还有 324 千米。

例 4　解放军某部队进行军事训练，队伍长为 525 米，以每秒 1 米的速度行进，一个通讯员因事需要从末尾到排头并立即返回末尾，如果他的速度是每秒 2.5 米，他从队伍的末尾到排头又回到末尾需要多少时间？

分析：通讯员从队伍的末尾到排头要用的时间是追及要用的时间，整个队伍长 525 米，就是要追的距离。通讯员到了排头再返回到末尾用的时间是排头与末尾两地相向而行的相遇时间。

解：

（1）通讯员每秒钟比整个队伍多行多少米？

2.5－1＝1.5（米）

（2）通讯员从末尾到排头需要多少秒？

525÷1.5＝350（秒）

（3）通讯员与整个队伍一秒钟共行多少米？

2.5＋1＝3.5（米）

（4）通讯员从排头返回末尾需要多少秒？

525÷3.5＝150（秒）

（5）通讯员从队伍末尾到排头又回到末尾需要多少秒？

350＋150＝500（秒）

综合算式：

525÷（2.5－1）＋525÷（2.5＋1）

＝525÷1.5＋525÷3.5

＝350＋150

＝500（秒）

500 秒＝8 分 20 秒

答：通讯员从队伍的末尾到排头又回到末尾需 8 分 20 秒。

例 5　一列火车全长 280 米，每秒行驶 25 米，要经过一座全长 920 米的大桥，求全车通过这座大桥需要多少秒钟。

分析：全车通过大桥指的是从车头上桥算起到车尾离桥为止，也就是应把桥的长度加上车身的长度作为全距离。然后根据距离÷速度＝时间，即可求出过桥时间。

解：

（1）桥长与火车长之和是多少？

920＋280＝1200（米）

（2）全车通过需要多少秒钟？

1200÷25＝48（秒）

综合算式：

（920＋280）÷25

＝1200÷25

＝48（秒）

答：全车通过大桥需 48 秒。

例 6　一列客车通过 840 米长的大桥需要 52 秒，用同样的速度，穿过 640 米长的隧道需要 44 秒。求这列客车的速度及车身长度各是多少？

分析：这列客车通过大桥用了 52 秒，这 52 秒行的距离是桥长加车身长，过隧道用了 44 秒钟，这 44 秒行的距离是隧道长加上车身长。它们所行驶的路程相差 840－640＝200（米），它们所用的时间相差 52－44＝8（秒），这就是说，这列客车用 8 秒的时间走了 200 米，到此，这列客车行驶的速度就可以求出来了。

解：

（1）这列客车每秒能行驶多少米？

（840－640）÷（52－44）

＝200÷8

＝25（米）

（2）这列客车的本身长多少米？

25×52－840

＝1300－840

＝460（米）

答：这列客车每秒能行驶 25 米，车身长 460 米。

例 7　李刚驾驶一只小船在河中行驶，顺流划行的速度是每小时 10 千米，逆流划行的速度是每小时 6 千米。船的划速是多少？水流的速度是多少？

分析：顺流划行每小时 10 千米是划船速度和水速的和，逆流划行每小

时 6 千米是划船速度和水速的差，所以这道题是简单的和差问题。

解：

（1）顺流速度加上逆流速度（即两倍划船速度）是多少？

10＋6＝16（千米）

（2）每小时的划船速度是多少？

16÷2＝8（千米）

（3）每小时水流多少千米？

10－8＝2（千米）

综合算式：

（10＋6）÷2＝16÷2＝8（千米）（划船速度）

（10－6）÷2＝4÷2＝2（千米）（水流速度）

答：船的划速是每小时 8 千米，水流的速度是每小时 2 千米。

例 8　汽船在静水中的速度是每小时 32 千米，汽船自甲城开出逆流而上，开行 8 小时到达相距 224 千米的乙城，汽船自乙城开回甲城需要多少小时？

分析：根据汽船逆水开行 8 小时行驶 224 千米这一条件，就可以求出逆水行驶速度。已知汽船在静水中行驶的速度是 32 千米，就可以求出水流速度。进一步就可以求出汽船顺水行驶的速度以及顺水行驶 224 千米所需要的时间。

解：

（1）汽船逆水每小时行多少千米？

224÷8＝28（千米）

（2）每小时水流速度是多少？

32－28＝4（千米）

（3）汽船顺水每小时行多少千米？

32＋4＝36（千米）

（4）汽船顺水行驶 224 千米，需要多少小时？

$224\div36=6\frac{2}{9}$（小时）

综合算式：

224÷［32＋（32－224÷8）］

＝224÷36

$=6\frac{2}{9}$（小时）

答：汽船自乙城开回甲城需要$6\frac{2}{9}$小时。

习题十五

1．甲、乙两城相距 520 千米，货车从甲城开至乙城需 8 小时，客车从乙城开至甲城需 10 小时。两车同时从甲、乙两地相向而行，几小时后两车还相距 52 千米？

2．一辆快车和一辆慢车，同时从甲乙两地出发，相向而行，经 5 小时相遇。相遇后快车继续行驶 3 小时到达乙地。已知慢车每小时行 48 千米，求甲

乙两地相距多少千米。

3．甲每小时行 7 千米，乙每小时行 5.5 千米，两人同时从甲地出发到乙地，甲行 10.5 千米后，因忘带东西，又返回原处，取了东西继续向乙地走，后来和乙同时到达乙地，求甲乙两地距离。

4．甲车每小时行 60 千米，乙车每小时行 50 千米，乙车从某站出发 2.5 小时后，甲车也从这个车站出发去追乙车，求多少小时能追上乙车。

5．一列火车全长 315 米，每秒行驶 30 米，要经过一座长 1035 米的大桥，需要多少秒钟？

6．一艘敌舰在离我海防哨所 5 千米处，正以每分钟 400 米的速度仓惶逃走，我快艇立即从哨所出发，9 分钟后，在离敌舰 500 米处开炮射击，一举击沉敌舰，求我快艇的速度比敌舰快多少。

7．在双轨的铁路上，甲、乙两列火车向同一方向行驶，甲车长 300 米，乙车长 240 米，甲车每秒行驶 45 米，乙车每秒行驶 30 米，求甲车追上乙车后，再经过多少秒超过乙车。

8．两个码头相距 600 千米，一艘汽艇从甲码头顺水行驶 25 小时到达乙码头，已知汽艇在静水中每小时行驶 20 千米。这艘汽艇从乙码头逆流回到甲码头需要多少小时？

9．甲乙两车分别从相距 219 千米的东西两城相对开出，甲车以每小时 36 千米的速度先开出 1.5 小时后，乙车才以每小时 30 千米的速度相对开出。甲车再开出几小时后才能与乙车相遇？

10．一架飞机执行空投任务，原计划每分钟飞行 8 千米，为了争取时间，将速度提高到每分钟 12 千米，结果比原计划早到了 40 分钟，机场与空投地点相隔多少千米？

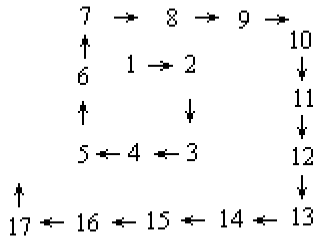
测试题（二）

1．观察下列各数的排列规律：

$\frac{0}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{1}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{1}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{2}$，$\frac{6}{1}$，……。

求：$\frac{11}{16}$排在第几个位置。

2．将自然数按从小到大顺序排列如图，在 2 处拐第一个弯，在 3 处拐第二个弯，在 5 处拐第三个弯，……，问拐第 20 个弯的地方是哪个数？



3．两个数的和是 667，两个数的最小公倍数除以最大公约数得 120。求这两个数。

4．一根木棍长 100 厘米。在距其左端和右端 37.5 厘米的地方各有一记号。要在不使用尺子的情况下，将它截成等长的几段。那么每段长多少厘米？

5．写出集合｛1，2｝的所有子集及真子集。

6．已知 A＝｛c|x 是 book 中的字母｝，B＝｛x|x 是 black 中的字母｝，求 A∪B，A∩B。

7．小红、小丽、小英来自甲、乙、丙三个班，并担任班委工作。知道小红不在甲班，小丽不在乙班，在甲班的不是体育委员，在乙班的是学习委员，小丽不是生活委员。问三人各在哪个班？担任什么工作？

8．某侦察队长接到紧急任务，要在代号为 A、B、C、D、E、F 六个队员中挑若干人去完成。人员配备要求满足下列条件：

①A、B 两人中至少要去 1 人；

②A、D 不能一起去；

③A、E、F 三人中至少要去 2 人；

④B、C 二人都去或都不去；

⑤C、D 二人中去一人；

⑥若 D 不去，则 E 也不去。

判断应让谁去？

9．出版社为一本书的封面设计了 4 种颜色，3 种图案。如果该书封面只采用一种图案及一种颜色，问一共有多少种不同封面方案可供选择？

10．由 1，2，3，4 四个数字可以组成多少个没有重复数字的自然数？

11．某班学生 56 人都是同年出生，能否至少有 2 人在同一个星期内过生日？

12．在一只箱子里有很多长方体、正方体、圆柱体、圆锥体的小木块。一次至少要取出多少块，才能保证其中至少有 10 个木块的几何形状相同？

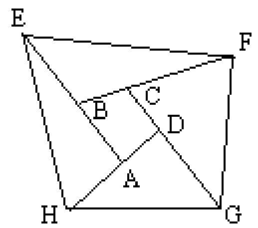
13．大小两辆汽车同时从相距 480 千米的两地相向而行，4 小时后相遇。已知大汽车比小汽车每小时少行 20 千米，求大、小汽车每小时各行多少千米。

14．一辆汽车以每小时 40 千米的速度，从甲地开往乙地，开出 3 小时后，一列火车也从甲地开往乙地。这列火车的速度是汽车的 2.5 倍，在甲地到乙地的中点列车追上汽车。求甲乙两地相距多少千米。

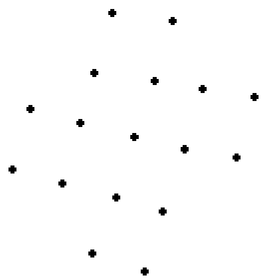
综合测试题

1．有 12 个因数的最小的自然数是几？

2．下图中的 ABCD 是一个任意的四边形，把它的各边按图示各延长一倍后，得一新的四边形 EFGH。如果小四边形 ABCD 的面积是“1”，求大四边形 EFGH 的面积是多少？



3．17 个钉子，钉成右图所示的不规则钉阵（图中相邻两行、两列钉的距离彼此相等），以这些钉为顶点，用皮筋去套，可以套出多少个正方形来？



4．计算下面各题：

（1）63630÷7÷9

（2）850×160÷80

（3）27000÷（125×3）

5．下面算式是几进制

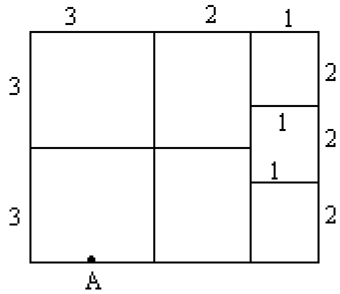
算式：

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\quad 7 \\ \hline 223 \end{array}$$

6．甲油库原存油量是乙油库的 6 倍，若两油库各增加 90 吨油后，则甲库的存量是乙库的 3 倍。求两油库原存油量各多少吨？

7．大光明奶牛场有甲种奶牛 24 头，乙种奶牛比甲种奶牛少 8 头，去年全年一共产奶 138000 千克，甲种奶牛每头平均年产奶 3250 千克，求乙种奶牛平均每头年产奶多少千克？（用方程法解）

8．下图是某城市街道图，图中所标的是街道长度的公里数。有一辆洒水车从车库 A 出发，洒遍整个街道，回到车库。请设计一条最短路线，并求出这条路线的长。



9．有一列数：1，3，4，7，11，18，……，（从第三个数起，每个数恰好是它前面相邻两个数的和），求第 1991 个数被 6 除余几？

10．三条圆形跑道，圆心都在操场中的旗杆处。甲、乙、丙三个人分别在里圈、中圈、外圈沿同样的方向跑步。开始时，三人都在旗杆的正东方向。里圈跑道长$\frac{1}{5}$公里、中圈长$\frac{1}{4}$公里、外圈长$\frac{3}{8}$公里。甲每小时跑3.5公里，乙每小时跑 4 公里，丙每小时跑 5 公里。他们同时出发，几小时后三人第一次同时回到起点？

11．在某个班级中，设 A＝｛会中文的学生｝，B＝｛会英文的学生｝，C＝｛会日文的学生｝，D＝｛会俄文的学生｝，将下列各句子用集合的符号表示出来

（1）既会中文又会日文的学生一定会英文，

（2）没有学生同时会英、日、俄三种文字。

12．有三个不透明有盖的杯子，第一个杯子里装有两个黑球，第二个杯子里装有两个白球，第三个杯子里装有一个黑球、一个白球，这三个杯子外面分别贴有“黑黑”，“白白”，“黑白”标签。有人把标签都换了。使标签与实际都不符。现在允许你从其中一个杯子里拿一个球，拿时不许看杯子里另一个球的颜色。问怎样拿法，就可以断定三个杯子里装的球的颜色？

13．将 10 个人任意分成甲、乙两组，每组至少 1 人，有多少种不同的分法？

14．有 10 个盒子，44 个乒乓球，能不能把这 44 个乒乓球放到盒子里去，使每个盒子里的乒乓球数都不相等。

15．一辆汽车从甲地开往乙地，每分钟行 525 米，预计 40 分钟到达，但行到一半路程时，机器发生故障，用 5 分钟修理完毕，如果仍需在预定时间到达，行驶余下的路程每分钟速度必须比原来快多少米？

答案或提示

习题一

1．1001＝11×3×17　546＝2×3×7×13　1993是质数；
2．∵九个数的和是3的倍数，∴不是质数；
3．第一组：35，30，39，143
　第二组：14，75，33，169（答案不唯一）
4．[提示]先求出除1外最小的约数。
　最大约数是66373307331；
5．填入20；
6．[提示]：200－14＝186＝3×2×31
　这个两位数是31。

习题二

1．50平方厘米；
2．16.82平方厘米；
3．9平方厘米；
4．4厘米；
5．18平方厘米；
6．18.84平方厘米；
7．8平方厘米；
8．10平方厘米；
9．6平方厘米。

习题三

1．76，6；
2．6；
3．40；
4．105；
5．21；
6．（a）14，（b）17；
7．（a）32，（b）100；
8．三角形124个，正方形31个，长方形88个；
9．三角形46个，长方形72个；
10．32。

习题四

1．①255；②106826430；③1565937164；
2．①23400；②37000000；③1000000；
3．①900；②8316；③44850；
4．①1712；②18088；③60；

习题五

1．（1）41；（2）110；（3）157；（4）168。
2．（1）$100111101_{(2)}$；（2）$111111101_{(2)}$。
3．（1）$110000_{(2)}$；（2）$100001000_{(2)}$。
4．（1）$1110_{(2)}$；（2）$111010_{(2)}$。

5．（1）11110111 $_{(2)}$ ；（2）1001000111 $_{(2)}$ 。

6．（1）1011 $_{(2)}$ ；（2）1011 $_{(2)}$ 。

7．（1）11011000 $_{(2)}$ ；（2）110011 $_{(2)}$ 。

8．15 种（1 分～15 分）。

9．（1）65；（2）528。

10．被除数是 1000011 $_{(2)}$ ，除数为 1101 $_{(2)}$ ，高为 101 $_{(2)}$ 。

（答案不唯一）

习题六

1．75 分钟。

2．甲数是 286，乙数是 290，丙数是 144，丁数是 576。

3．45 亩。

4．自行车 15 千米，摩托车 45 千米。

5．甲数是 37，乙数是 43。

6．哥哥 14 岁，弟弟 9 岁。

7．甲仓存 43500 千克，乙仓存 41000 千克。

8．这批石油共 200 吨。

9．较大数是 92，较小数是 69。

10．第一堆煤原有 150 吨，第二堆煤原有 100 吨。

习题七

1．买来科技书 240 本。

2．平均每天吃大米 65 千克。

3．每本笔记本 0.2 元。

4．汽车平均每小时行 50 千米。

5．工人乙平均每天加工 13 个。

6．乙数 32，甲数 288。

7．一支钢笔 3 元，一支铅笔 0.15 元。

8．第一队挖 125 米，第二队挖 50 米。

9．乙瓶 120 毫升，甲瓶 360 毫升。

10．甲数 210，乙数 70，丙数 90。

习题八

1．（a）有两个奇结点，可以一笔画成；（b）有 8 个奇结点，需四笔画成；（c）有 4 个奇结点，需两笔画成；（e）有 10 个奇结点，需五笔画成；（d）、（f）没有奇结点，是欧拉图，可以一笔画成回到起点。

2．能。路线可以这样设计：邮局→21→17→18→12→11→6→5→2→1→4→3→8→7→13→14→19→20→15→9→10→16→邮局

3．全程要走 46 公里，邮递路线如下图。

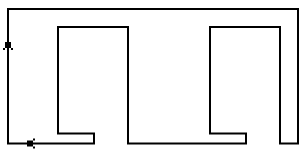


图100

4．需要重复走的路段为 FG、BC、DI 和 JNM。最佳路线为：邮局→F→A→B→G→F→G→H→C→B→C→D→I→D→E→J→H→M→N→J→N→M→邮局，全

程要走 33 公里。

测试题（一）

1．找出两个合数后，剩下的就是质数。261，1112111 是合数，251 是质数。

$500=5^3\times 2^2$

（1）因此约数个数：（3＋1）×（2＋1）＝12（个）

（2）所有约数都是由下面两组数中两两的乘积构成的：

第 1 组：1，5，25，125 第 2 组：1，2，4，

所有约数的和是

1×（1＋5＋25＋125）＋2×（1＋5＋25＋125）＋4×（1＋5＋25＋125）

＝（1＋5＋25＋125）×（1＋2＋4）＝156×7＝1092

3．6.5；

4．1；

5．53；

6．128

7．（1）40；（2）42；（3）240

8．（1）$1001001_{(2)}$；（2）$100111011_{(2)}$；

9．（1）$10101_{(2)}$；（2）111011

10．提示：买入 65 只鸭之后，和鸡的一半相等。也就是说，鸡鸭原来的总数加上 65 只鸭，这个总数就相当于鸡只数的 1.5 倍。原有鸡 490 只，鸭 180 只。

11．提示：假定已经注水完了，大池里的水量恰是小池水量的 3 倍了，那么大水池比小水池所多的水应是注水以后小水池水量的（3－1）倍。两水池各应注入 390 立方米的水。

12．提示：应运用间接设元法。设实际每天修 X 米。

50x＝40×60

x＝48

答：实际每天比原计划多修 8 米。

13．提示：间接设无法。设实际烧了 X 天。

（300－30）X＝300×54

270X＝16200

x＝60

答：实际比原计划多烧了 6 天。

14．（a）两笔；（b）四笔；

15．（2π×5＋8）×2＋8×2≈94.8（米）

习题九

1．（1）26；（2）42。

2．91＋93＋95＋…＋109＝1000

3．（1）3；（2）98；（3）153。

4．（1）88或94；（2）$\frac{35}{45}$。

5．203。

6．第二列。

7．361。

8．（1）96；（2）86；（3）第 45 行第 35 列。

习题十

1．（35、98、112）＝7

35＝5×7，98＝7×14，112＝7×16

[35、98、112]＝3920。

2．403＝13×31，527＝17×31，713＝23×31

[403、527、713]＝13×17×23×31＝157573

3．易看出两数有公约数 3。

83613＝3×27871

121824＝3×40608

用辗转相除法求出（27871，40608）＝47

两数最大公约数为 3×47＝141。

4．（301，215，86）＝43

所以全班共有 43 人。

每人拿到笔记本：301÷43＝7（本）

每人拿到铅笔：215÷43＝5（支）

每人拿到橡皮：86÷43＝2（块）

5．5766÷31÷31＝6

6＝2×3

因两数都是合数，所以一个为 2×31＝62，另一个为 3×31＝93。

6．504×6÷42＝72。

7．[2、3、4、5、6、7、8、9]＝2520

全校至少有 2520＋1＝2521 名学生。

习题十一

1．（1）$\in$，（2）$\in$，（3）$\overline{\in}$，（4）$\subset$（5）＝，（6）$\subset$

（7）$\supset$，（8）$\subset$。

2．ϕ，{1}，{2}，{3}，{1，2}，{1，3}，{2，3}，{1，2，3}。其中除{1，2，3}以外都是真子集。

3．A∪B＝{a，b，c，d，e，f}，A∩B＝{b，d}，

A∪B∪C＝{a，b，c，d，e，f，g}，A∩B∩C＝{b}。

4．A∩B＝{x｜9＜x≤12}，A∪C＝{x｜x≥9}，B∩C＝{9，10}。

5．A∩B＝（x｜x 是 12 的倍数），A∪B＝{x｜x 是 3 或 4 的倍数}。A∪C＝{x｜x 是 3 的倍数}。A∩C＝{x｜x 是 9 的倍数}。

习题十二

1．1——山东，2——湖北，3——陕西，4——吉林，5——甘肃

2．乙是教师，丙是工人，甲是战士。

3．冠军是 C。

4．3 班是冠军，4 班第二，2 班第三。

5．A 是第一名，C 是第二名，B 是第三名，E 是第四名，D 是第五名。

6．苹果在黄箱子里。

习题十三

1．由乘法原理，有 6×5 种不同情况。

2．（1）11；（2）30。3．100000。

4．（1）$\frac{27\times26}{2}=351$；（2）26。

5．7。

6．（1）5×4×3×2×1－4×3×2×1＝96；

（2）3×4×3×2×1＝72。

7．3^4＝81（种）

8．16×9×4×1＝576（种）或 4！×4！＝576（种）

习题十四

1．提示：把 0－1 线段分成九等份，每一份看作一个“抽屉”。由抽屉原则，已响十个数一定有两个数落在同一个“抽屉”里，其差不超过$\frac{1}{9}$。

2．提示：用 12 去除每一个数，得到的 13 个余数中必有两个相同。余数相同的两数之差必是 12 的倍数。

3．提示：把这条小路分成每段 1 米长的 100 段，每段看作一个抽屉。

4．提示：每列只可能有 2×2×2＝8 种不同的涂色方式，看作 8 个“抽屉”。9 列看作 9 个“苹果”。

5．3×40＝120＜125，会有。

6．23 个。

习题十五

1．（520－52）÷（520÷8＋520÷10）＝4（小时）

2．（48×5÷3＋48）×5＝640（千米）

3．5.5×（10.5×2÷7）÷（7－5.5）＝11（小时）

7×11＝77（千米）（两地距离）

4．50×2.5÷（60－50）＝12.5（小时）

5．（1035＋315）÷30＝45（秒）

6．（5000＋400×9－500）÷9－400＝500（米）

7．（300＋240）÷（45－30）＝36（秒）

8．600÷[20－（600÷25－20）]＝37.5（小时）

9．（219－36×1.5）÷（36＋30）＝2.5（小时）

10．12×[8×40÷（12－8）]＝960（千米）

测试题（二）

1．$\frac{11}{16}$排在第168个位置。

2．111。

3．667＝23×29

120＝2×2×2×3×5＝24×5＝8×1524＋5＝29 所以，两数可是 23×24＝552　23×5＝115　8＋15＝23 所以两数还可是

29×8＝232　29×15＝435

4．将木棍从有记号处截断，得两截 37.5 厘米长的木棍和一截为 25 厘米的木棍，再从每根 37.5 厘米的木棍上截下 25 厘米。得 2 根 12.5 厘米木棍和 3 根 25 厘米木棍。再从 25 厘米木棍上截下 12.5 厘米。得 8 根 12.5 厘米长的木棍。

5．ф，{1}，{2}，{1，2}。其中ф，{1}，{2}都是集合{1，

2｝的真子集。

6．A∪A＝｛a，b，c，k，l，o｝

A∩B＝｛b，k｝。

7．小红在乙班，当学习委员；

小丽在丙班，当体育委员；

小英在甲班，当生活委员。

8．应选 A、B、C、F 去。

9．由乘法原理，4×3＝12（种）

10．4＋4×3＋4×3×2＋4×3×2×1＝4＋12＋24＋24＝64（个）

11．能。一年有 52 周，而 56＞52。

12．9×4＋1＝37（块）

13．（480÷4－20）÷2＝50（千米）大汽车速度。

50＋20＝70（千米）小汽车速度

14．40×3÷（40×2.5－40）＝2（小时）

40×（3＋2）×2＝400（千米）

综合测试题

1．12＝1×12＝3×4＝2×6＝3×2×2

根据约数个数的计算方法，以及求“最小”的要求，我们尽可能将质因数取得小一些、次数大的质因数取得小一些。

2^{11}，$2^3×3^2$，$2^5×3$，$2^2×3×5$

比较这四个数，$2^3×3^2$ 最小。这个自然数是 72。

2．5

3．19

4．（1）1010；（2）1700；（3）72；

5．八进制

6．提示：由于两库所增加的吨数相同，所以，甲、乙两库存油量的差是不变的。原来，甲比乙多 5 倍，还是这个差数，只相当于乙库现在的 2 倍了。也就是说，乙库原存油的 5 倍等于乙库现存油的 2 倍。再进一步分析，乙库原存油的 2.5 倍等于乙库现存油的 1 倍。那么，所增加的 90 吨油恰好相当于乙库原存油的 1.5 倍。答：乙库原存油 60 吨，甲库原存油 360 吨。

7．解：设乙种奶牛平均每头年产奶 x 千克。

（24－8）x＋3250×24＝138000

16x＝138000－78000

16x＝60000

x＝3750

答：乙种奶牛平均每头年产奶 3750 千克。

8．把图中十个奇结点分成 5 对，两两连线，变成偶结点，最短路线全长 54 公里。

9．第 1991 个数被 6 除余 5。

10．甲跑一圈用$\frac{1}{5}\div 3.5=\frac{2}{35}$（小时）

乙跑一圈用$\frac{1}{4}\div 4=\frac{1}{16}$（小时）

丙跑了一圈用$\frac{3}{8}\div 5=\frac{3}{40}$（小时）

$\frac{2}{35}$、$\frac{1}{16}$、$\frac{3}{40}$的最小公倍数为6（小时）

11．（1）$A\cap B\subseteq B$；（2）$B\cap C\cap D=\varnothing$。

12．从标有“黑、白”标签的杯子里取一个球。因为这个杯子里一定是同色球，如果取出的是黑球，这个杯子里是两个黑球，标“白白”的装的是“黑、白”两色球，标“黑黑”的装的是两个白球。如果取出的是白球，这个杯子里装有两个白球；标“黑黑”的杯子里装的是黑、白两色球；标“白白”的杯子里，装有两个黑球。

13．$2^{10}-2=1022$（种）

14．提示：不能。假定每个盒子里乒乓球数不等。那么，即使按放入的乒乓球个数最少的情况计算，十个盒子分别放0，1，2，3，4，5，6，7，8，9个乒乓球，0＋1＋2＋3＋5＋6＋7＋8＋9＝45（个）。超过44个。若从某个盒子里取走一个，那么，就有两个盒子里的球数相等了。

15．$525\times(40\div 2)\div[(40\div 2)-5]-525$

$=10500\div 15-525$

$=700-525$

$=175$（米）