学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中小学生课堂故事博览

趣味中的图形问题

——图形的故事

BOOK

内部资料 非卖品

趣味中的图形问题——图形的故事

七桥问题

现今的加里宁格勒，旧称哥尼斯堡，是一座历史名城。

哥城景致迷人，碧波荡漾的普累格河，横贯其境。在河的中心有一座美丽的小岛。普河的两条支流，环绕其旁汇成大河，把全城分为下图所示的四个区域；岛区（A），东区（B），南区（C）和北区（D）。有七座桥横跨普累格河及其支流，其中五座把河岸和河心岛连接起来，这一别致的桥群，古往今来，吸引了众多的游人来此散步！

早在 18 世纪以前，当地的居民便热衷于以下有趣的问题：能不能设计一次散步，使得七座桥中的每一座都走过一次，而且只走过一次？这便是著名的哥尼斯堡七桥问题。

读者如果有兴趣，完全可以照样子画一张地图，亲自尝试。不过，要告诉大家的是：想把所有的可能线路都试过一遍是极为困难的！因为各种可能的线路不下于五千种，要想一一试过，谈何容易！

问题的魔力，竟然吸引了天才的欧拉（Euler，1707～1783）

公元 1736 年，29 岁的欧拉向圣彼得堡科学院递交了一份题为《哥尼斯堡的七座桥》的论文，论文的开头是这样写的：“讨论长短大小的几何学分支，一直被人们热心地研究着，但是还有一个至今几乎完全没有探索过的分支；莱布尼兹最先提起过它，称之‘位置的几何学’。这个几何学分支讨论只与位置有关的关系，研究位置的性质，它不去考虑长短大小，也不牵涉到量的计算，但是至今未有过令人满意的定义，来刻划这门位置几何学的课题和方法，……”

接着，欧拉运用他那娴熟的变换技巧，如同下图，把哥尼斯堡七桥问题变为读者所熟悉的，简单的几何图形的“一笔画”问题：即能否笔不离纸，一笔画但又不重复地画完以下的图形？

读者不难发现：右图中的点 A、B、C、D，相当于七桥问题中的四块区域；而图中的弧线，则相当于连接各区域的桥。

聪明的欧拉，正是在上述基础上，经过潜心研究，确立了著名的“一笔画原理”，从而成功地解决了哥尼斯堡七桥问题。不过，要弄清欧拉的特有思路，我们还得从“网 B 络”的连通性讲起。

所谓网络，是指某些由点和线组成的图形，网络中的线弧都有两个端点，而且互不相交。如果一个网络中的任意两点，都可以找到网络中的某条弧线，把它们连接起来，那么，这样的网络就称为连通的。连通的网络简称脉络。

显然，上面的三个图中，图Ⅰ不是网络，因为它仅有的一条弧线只有一个端点；图Ⅱ也不是网络，因为它中间的两条弧线相交，而交点却非顶点；图Ⅲ虽是网络，但却不是连通的。而七桥问题的图形，则不仅是网络，而且是脉络！

网络的点如果有奇数条的弧线交汇于它，这样的点称为奇点。反之，称为偶点。

欧拉注意到：对于一个可以“一笔画”画出的网络，首先必须是连通的；其次，对于网络中的某个点，如果不是起笔点或停笔点，那么，交汇于这样点的弧线必定成双成对，即这样的点必定是偶点！

上述分析表明：网络中的奇点，只能作为起笔点或停笔点。然而，一个可以一笔画画成的图形，其起笔点与停笔点的个数，要么为 0，要么为 2。于

是，欧拉得出了以下著名的“一笔画原理”：

“网络能一笔画画成必须是连通的，而且奇点个数或为 0，或为 2。

当奇点个数为 0 时，全部弧线可以排成闭路。”

现在读者看到，七桥问题的奇点个数为 4。（见上图）。因而，要找到一条经过七座桥，但每座桥只走一次的路线是不可能的！

下图画的两只动物世界的庞然大物，都可以用一笔画完成。它们的奇点个数分别为 0 和 2。

需要顺便提到的是：既然可由一笔画画成的脉络，其奇点个数应不多于两个，那么，两笔划或多笔划能够画成的脉络，其奇点个数应有怎样的限制呢？我想，聪明的读者完全能回答这个问题。倒是反过来的提问需要认真思考一番：即若一个连通网络的奇点个数为 0 或 2，是不是一定可以用一笔画画成？结论是肯定的！并且有：“含有 2n（n＞0）个奇点的脉络，需要 n 笔划画成。”

Hampton Court 迷阵之谜

请看有趣的英国伦敦的 Hampton Court 迷阵实图图 1。

图中 A 为进出口，黑线表示篱笆，白的空隙表示通路。迷阵的中央 Q 处有两根高柱，柱下备有椅子，可供游人休息。你能否从 A 点进去，然后再从 A 点出来呢？也许读者认为这一迷阵并不复杂但倘若人身临其境，也难免要东西碰壁，左右受阻，陷于迷津！

那么，迷宫之“谜”的谜底何在呢？让我们如同上节中七桥问题那样，我们把该迷阵中所有的通路都用弧线表示出来，便能得到右图样的脉络。

现在的问题是：如何从 A 点出发走到迷宫的中心 Q；或从 Q 点回到入口处 A？只是，从 A 到 Q 的通路，并不像图 2 那么笔直，实际上是弯弯曲曲回回转转的。走的时候，稍不小心便会进入死胡同，或者在某范围打转转，甚至于走回头路！

不过，有一种情况似乎例外，即迷宫的网络可以由“一笔画”沟通。这时只要不走重复的路，就一定能顺利走出迷宫！这无疑等于解决了迷宫问题。然而，倘若迷宫真是如同上述那样，其本身也就失去了“迷”的含义。

在 Hampton 迷阵中，它的脉络中除 F 点外，几乎全是奇点。因而，不要说一笔画，即使五、六笔画也难以沟通整个脉络！

然而，我们并没有因此而“山穷水尽”。因为任何一个脉络都可以通过在奇点间添加弧线的办法，使它变成“一笔画”的图形。这是由于在奇点间添加一条弧线，可以一下子使脉络的奇点个数减少两个！

图 3 是把 Hampton 迷阵脉络的奇点两两连接起来，所得新脉络的奇点已经只剩两个，因而可以用一笔画画出。

上述方法表明：要想走出迷宫，只须在岔道口做上记号，并对某些线路作必要的重复。这样，纵然我们多走了些路，却能稳当地走出迷宫！

最后我们补充一点：即网络的奇点必定成双。这是图论中最早的一个定理，也是由欧拉发现的。

证明很简单：我们可以设想如同左图那样，拆去原来网络中的某条弧线。这样一来，要么奇点增加两个，偶点减少两个；要么偶点增加两个，奇点减少两个；要么奇偶点不增也不减，除此之外别无第四种可能！所有上述情形，

网络奇点数目的奇偶性都不会改变。如此这般，我们可以把网络中的弧线一条又一条地拆去，直至最后只剩下一条弧线为止。这时奇点数目明显为 2，从而推出原网络的奇点数目一定为偶数。

橡皮膜上的数字

前面我们讨论的是一种只研究图形各部分位置的相对次序，而不考虑它们尺寸大小的新几何学。莱布尼兹（Leibniz，1646～1716）和欧拉为这种“位置几何学”的发展奠定了基础。如今这一新的几何学，已经发展成一门重要的数学分支——拓扑学。

拓扑学研究的课题是极为有趣的。诸如：左手戴的手套能否在空间掉转位置后变成右手戴的手套？一条车胎能否从里面朝外头把它翻转过来？是否存在只有一个面的纸张？一只有耳的茶杯与救生圈或花瓶比较，与哪一种更相似些？等等，等等，都属于拓扑学研究的范畴。

在拓扑学中人们感兴趣的只是图形的位置，而不是它的大小。有人把拓扑学说成是橡皮膜上的数学是很恰当的。因为橡皮膜上的图形，随着橡皮膜的拉动，其长度、曲直、面积等等都将发生变化。此时谈论“有多长？”、“有多大？”之类的问题，是毫无意义的！

不过，在橡皮几何里也有一些图形的性质保持不变。例如点变化后仍然是点；线变化后依旧为线；相交的图形绝不因橡皮的拉伸和弯曲而变得不相交！拓扑学正是研究诸如此类，使图形在橡皮膜上保持不变性质的几何学。

一条头尾相连且自身不相交的封闭曲线，把橡皮膜分成两个部分。如果我们把其中有限的部分称为闭曲线的“内部”，那么另一部分便是闭曲线的“外部”。从闭曲线的内部走到闭曲线的外部，不可能不通过该闭曲线。因此，无论你怎样拉扯橡皮膜，只要不切割、不撕裂、不折叠、不穿孔，那么闭曲线的内部和外部总是保持不变的！

“内部”和“外部”，是拓扑学中很重要的一组概念。

判定一个图形的内部和外部，并不总是一目了然。有时一些图形像迷宫那样弯弯曲曲，令人眼花缭乱。这时应该怎样判定图形的内部和外部呢？上一世纪中叶，法国数学家若当（Jordan，1838～1922）提出了一个精妙绝伦的办法：即在图形外找一点，与需要判定的区域内的某个点连成线段，如果该线段与封闭曲线相交的次数为奇数，则所判定区域为“内部”，否则为“外部”。

在橡皮膜上的几何中，有一个极为重要的公式，这个公式以欧拉的名字命名，是欧拉于公元 1750 年证得的。公式说：对于一个平面脉络，脉络的顶点数 V、弧线数 E 和区域数 F，三者之间有如下关系：

$V+F-E=2$

读者不妨用一些简单的图形，去验证欧拉的这个关系式，以加深对它的认识。例如右图脉络，容易算出 $V=8$，$F=8$，$E=14$，而 $V+F-E=8+8-14=2$，等等。

欧拉公式的证明与“奇点成双”定理的证明很相类似。事实上，对于一个脉络，当拆掉某条区域周界的弧线之后，所得新的脉络其顶点数 V、区域数 F 和弧线数 E，与原脉络的顶点数、区域数和弧数之间有如下关系

$$\begin{cases} V^1 = V \\ F^1 = F-1 \\ E^1 = E-1 \end{cases}$$

从而有

$$V^1+F^1-E^1=V+F-E$$

仿照上述办法，可以一直拆到最后，拆成一个如同下图的、不含内部区域的树状网络，而对于这种树状网络，其顶点数 $V^{(n)}$、区域数 $F^{(n)}$ 弧线数 $E^{(n)}$ 之间，以下的关系式是很明显的：

$V^{(n)}+F^{(n)}-E^{(n)}=2$

注意到

$V+F-E=V_1+F_1-E_1=\cdots=$

$V^{(n)}+F^{(n)}-E^{(n)}=2$

从而也就证得了欧拉公式

非凡的思考

公元 1630 年即在欧拉发现网络公式的前 120 年，法国数学家笛卡儿（Descartes，1596—1650）以其非凡的思考，写下了一则关于多面体理论的短篇。

笛卡儿的手稿，实际上是用完全不同的方法推出了欧拉发现的公式：

$V+F-E=2$

为了弄清这位解析几何创始人不同凡响的思路，我们还得从立体角的概念讲起：

所谓立体角是指在一点所作的三个或三个以上不同平面的平面角所围成的空间部分。立体角的大小，是由立体角在以角顶为球心的单位球面上截下的球面多角形的面积来度量的。右图的立体角大小，即以球面三角形 ABC 的面积来度量的。容易证明，图中这块面积 σ_1 等于：

$\sigma_1=\alpha+\beta+\gamma-\pi$

事实上，如下图，在单位球 O 上，大圆弧 AB、BC、AC 所在的大圆，把半球面分为 1、2、3、4 四个部分。图中的 A、A′和 B、B′显然是两组径对点。通过简单计算可知，以上四个部分的面积 σ_1、σ_2、σ_3 和 σ_4，满足：

$$\begin{cases} \sigma_1+\sigma_3=\dfrac{\beta}{2\pi}，4\pi=2\beta \\ \sigma_1+\sigma_4=\dfrac{\alpha}{2\pi}\bullet 4\pi=2\alpha \\ \sigma_1+\sigma_2=\dfrac{\gamma}{2\pi}\bullet 4\pi=2\gamma, \\ \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4=2 \end{cases}$$

由此得 $\sigma_1=\alpha+\beta+\gamma-\pi$

与平面几何中求一个角的补角相类似，一个立体角的补立体角可以这样得到：如下图，在已知立体角 O—ABC 内部取一点 O′*　由 O′向各个面引垂线 O′A′、O′B′、O′C′，则立体角 O′—A′B′C′即为立体角 O—

ABC 的补立体角。

由右图容易看出，补立体角的三个面角 a′，b′，c′分别与α、β、γ互补。从而，原立体角 O—ABC 的大小可以表为：

$\sigma_1=\alpha+\beta+\gamma-\pi=(\pi-a^1)$

$+(\pi-b^1)+(\pi-c^1)-\pi$

$=2\pi-(a^1+b^1+c^1)$

同理，补立体角 $O^1—A^1B^1C^1$ 的大小可以表为

$\sigma_1^1=2-\pi(a+b+c)$

上式中的 a、b、c 为原立体角 O—ABC 的各个面角。

一个平面凸多边形的外角和等于 2π，即所有内角的补角的和等于 2π。那么，对于空间的凸多面体，所有顶点立体角的补立体角之和，是否也有类似的关系呢？为此，我们从多面体内部的一点 O 向多面体的各个面引垂线。从右图不难看出：多面体所有顶点立体角的补立体角，恰好占据了 O 点周围的全部空间！

因而，其总和应等于单位球球面的面积，即 4π。

下面我们回到笛卡儿的思路上来。

令多面体的顶点数为 V，面数为 F，第 i 个面的内角个数（也即边数）为 n_i。则所有内角的个数 p 为 $p=n_1+n_2+\cdots+n_F$

再用Σ表示所有面的内角和，于是根据上面讲过的多面体补立体角之和为 4π的结论知：

$4\pi=2\pi\cdot V-\Sigma$

又第 i 个面的内角和为 $(n_i-2)\pi$，从而 F 个面的全部内角相加得：

$\Sigma=(n_1-2)\pi+(n_2-2)\pi+\cdots+(n_F-2)\pi$

$=(n_1+n_2+\cdots+n_F)\pi-2\pi F$

代入上式可得

$$4\pi=2\pi V-(\pi p-2\pi F)$$

$$\therefore p=2(V+F)-4$$

这，就是笛卡儿留给后人的结果！

笛卡儿的公式离欧拉公式只有一步之遥。欧拉的成功，只是由于他导入了棱数的概念，从而打破了古典几何学的清规戒律，建立起拓扑学的新秩序。

事实上，令多面体的棱数为 E，则多面体各个面的内角总数恰为棱数的两倍，即

$p=2E$

从而 $2E=2V+2F-4$

立得 $V+F-E=2$

上述关于多面体的欧拉公式的一个简单应用是：论证正多面体只有五种。实际上，假定正多面体的每个面都是正 p 边形，而每个顶点都交汇着 q 条棱，这样，我们有

$$\begin{cases}qV=2E\\pF=2E\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}V=\dfrac{2E}{q}\\F=\dfrac{2E}{p}\end{cases}$$

代入欧拉公式得：

$$\frac{2E}{q}+\frac{2E}{p}-E=2$$

从而 $$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{E}$$

注意到 E≥6 时，上述方程只能有以下五种正整数解：

	p	q	V	F	E	名称
(1)	3	3	4	4	6	正四面体
(2)	3	4	8	6	12	立方体
(3)	4	3	6	8	12	正八面体
(4)	3	5	20	12	30	正二十面体
(5)	5	3	12	20	30	正十二面体

下面是相应于它们的立体图。

值得说明的是：本节关于多面体的欧拉公式，只是上一节平面欧拉公式的一个特例。实际上我们很容易采用以下方法，把一个立体图形的表面，摊成一个平面图形：设想多面体的表面是一层伸缩自如的橡皮膜，而多面体的内部则是中空的。现在在它的一个面上把橡皮膜穿开一个洞，然后用手指插进洞里，并用力向四周拉伸，直至摊成平面。下图形象而有趣地表现了把一个正方体表面摊开的过程。图（2）中最外面不整齐的边界实际上就是洞的轮廓。如果我们把图形的外部区域，整个地看成开洞的面，并将弧线修整成顺眼的样子，即得图（3）。这样的图，称为正方体的平面拓扑图。其它的多面体或立体图形，也可以类似地得到相应的平面拓扑图，从而把立体表面的问题化为平面上的问题加以解决。这，便是为什么平面网络的欧拉公式，可以应用于多面体表面的缘故！

有趣的“ 周游世界 ”游戏

公元 1856 年曾以发明“ 四元数 ” 而闻名的著名数学家哈密尔顿发明了一种极为有趣的“ 周游世界 ” 的游戏，这一游戏当时曾经风靡一时。在游戏中，哈密尔顿用一个正十二面体的 20 个顶点，代表我们这个星球上的 20 个大城市。游戏要求：沿着正十二面体的棱，从一个“ 城市 ” 出发，遍游所有的“ 城市 ”，最后回到原出发点，但所经过的棱不许重复！

周游世界游戏的解答称为哈密尔顿圈，它并不难求，但极有意思。下图是正十二面体和它的平面拓扑图。

下面让我们看一看，在正十二面体的平面拓扑图中，一个哈密尔顿圈需要具备什么样的条件？首先,由于哈密尔顿圈包含有 20 个顶点及连接它们的棱，因此应当是一个简单 20 边形的周界，这个 20 边形显然是由若干五边形拼接而成，而这些五边形中不可能有三个具有公共点！否则的话，这个公共点便会如同图 1 那样，成了 20 边形的内部的点，从而也就不可能成为哈密尔顿圈上的点。这与哈密尔顿圈包含全部 20 个顶点相矛盾。其次，所说的五边形也不可能围成一个环形。因为如果是这样的话，拼接起来的多边形周界，势必分为两个隔离的部分，这自然是哈密尔顿圈所不许可的！

以上分析表明：哈密尔顿圈中的五边形，只能像右图那样排成一串！

现在的问题是：在正十二面体的平面拓扑图中，究竟能否找到上面讲的那样的一串五边形呢？答案是肯定的！下图便是一种解答。

在下图中，左边的图是右边一串五边形在正十二面体上的实际位置。为了便于读者记忆，设想我们沿着一条棱前进到达某个顶点，这时摆在我们面前显然有左拐和右拐两条路。倘若我们周游的路线是向右拐的，这时我们便在这个顶点旁做“＋”的记号；倘若我们周游的路线是向左拐的，则做“－”的记号。上图右边的“＋”、“－”记号，便是根据上述规则标的。依顺时针方向它们是以→+++---+-+-→的方式循环着。这是很好记的！读者可以在正十二面体的平面拓扑图上，按上述的法则找到哈密尔顿圈。右下图便是一个例子。

哈密尔顿周游世界的游戏无疑能够移植到任意的多面体上来。不过有一点是肯定的，并不是所有的平面脉络都存在哈密尔顿圈，左下图就是一个不存在哈密尔顿圈的例子。

事实上，我们可以如同右图中已经画好的那样，把所有的顶点分别画成“●”和“○”。容易看出：图中所有与“●”相邻接的顶点都是“○”；而所有与“○”相邻接的顶点都是“●”。这样一来，如果我们问题中的哈密尔顿圈存在的话，那么圈上的顶点必然是一“●”一“○”的点列。由于这样的点列头尾相接，因而“●”的数目与“○”的数目必须是相等的。

然而，我们图中却明显地有 5 个“●”和 4 个“○”。这表明对上图来说，所求的哈密尔顿圈是不存在的！

神奇的莫比乌斯带

公元 1858 年，德国数学家莫比乌斯（Mobius，1790～1868）发现：把一个扭转 180°后再两头粘接起来的纸条，具有魔术般的性质。

因为，普通纸带具有两个面（即双侧曲面），一个正面，一个反面，两个面可以涂成不同的颜色；而这样的纸带只有一个面（即单侧曲面），一只小虫可以爬遍整个曲面而不必跨过它的边缘！

我们把这种由莫比乌斯发现的神奇的单面纸带，称为“莫比乌斯带”。

拿一张白的长纸条，把一面涂成黑色，然后把其中一端翻一个身，如同上页图那样粘成一个莫比乌斯带。现在像图中那样用剪刀沿纸带的中央把它剪开。你就会惊奇地发现，纸带不仅没有一分为二，反而像图中那样剪出一个两倍长的纸圈！

有趣的是：新得到的这个较长的纸圈，本身却是一个双侧曲面，它的两条边界自身虽不打结，但却相互套在一起！为了让读者直观地看到这一不太容易想象出来的事实，我们可以把上述纸圈，再一次沿中线剪开，这回可真的一分为二了！得到的是两条互相套着的纸圈，而原先的两条边界，则分别包含于两条纸圈之中，只是每条纸圈本身并不打结罢了。

莫比乌斯带还有更为奇异的特性。一些在平面上无法解决的问题，却不可思议地在莫比乌斯带上获得了解决！

比如在普通空间无法实现的“手套易位问题：人左右两手的手套虽然极为相像，但却有着本质的不同。我们不可能把左手的手套贴切地戴到右手上去；也不能把右手的手套贴切地戴到左手上来。无论你怎么扭来转去，左手套永远是左手套，右手套也永远是右手套！不过，倘若自你把它搬到莫比乌

斯带上来，那么解决起来就易如反掌了。

在自然界有许多物体也类似于手套那样，它们本身具备完全相像的对称部分，但一个是左手系的，另一个是右手系的，它们之间有着极大的不同。

下图画的是一只“扁平的猫”，规定这只猫只能在纸面上紧贴着纸行走。现在这只猫的头朝右。读者不难想象，只要这只猫紧贴着纸面，那么无论它怎么走动，它的头只能朝右。所以我们可以把这只猫称为“右侧扁平猫”。

“右侧扁平猫”之所以头始终朝右，是因为它不能离开纸面。

现在让我们再看一看，在单侧的莫比乌斯带上，扁平猫的遭遇究竟如何呢？右图画了一只“左侧扁平猫”，它紧贴着莫比乌斯带，走呀走，走呀走，最后竟走成一只“右侧扁平猫”！

扁平猫的故事告诉我们：堵塞在一个扭曲了的面上，左、右手系的物体是可以通过扭曲时实现转换的！让我们展开想象的翅膀，设想我们的空间在宇宙的某个边缘，呈现出莫比乌斯带式的弯曲。那么，有朝一日，我们的星际宇航员会带着左胸腔的心脏出发，却带着右胸腔的心脏返回地球呢！瞧，莫比乌斯带是多么的神奇！想必读者已经注意到，莫比乌斯带具有一条非常明显的边界。这似乎是一种美中不足。公元 1882 年，另一位德国数学家克莱茵（Klein，1849～1925），终于找到了一种自我封闭而没有明显边界的模型，称为“克莱茵瓶”（左图）。这种怪瓶实际上可以看作是由一对莫比乌斯带，沿边界粘合而成。因而克莱茵瓶比莫比乌斯带更具一般性。

数学史上的奇迹

公元 1852 年，毕业于英国伦敦大学并从事地图着色工作的佛朗西斯·格里斯，发现了一个奇怪的现象：无论多么复杂的地图，只要用四种颜色，就可以区分有公共边界的国家和地区。佛朗西斯觉得这中间一定有着什么奥妙，于是写信向其胞兄佛德雷克询问。佛德雷克对数学造诣颇深，但绞尽脑汁依然不得要领，只好求教于自己的老师，著名的英国数学家摩根（Morgan，1806～1871）。摩根教授怀着浓厚的兴趣，对此苦苦思索了几个昼夜，觉得无法判定佛德雷克所提的问题是对还是错。于是便写信给挚友，著名的数学家哈密尔顿（Hmilton，1805～1865）探讨。

摩根在信中希望哈密尔顿要么能证明“如果一张地图，图上任意分成许多部分，要求有共同边界的两部分涂不同颜色，那么只要四种颜色就够了”，要么构造出一个需要五种或更多种颜色的图来。

然而，智慧超人的哈密尔顿没能做到。他耗费了整整 13 年心血，终于一筹莫展，抱恨逝去！

哈密尔顿死后，又过了 13 年，一位颇有名望的英国数学家凯莱（Cayley，1821～1895）在一次数学年会上把这个问题归纳为“四色猜想”。并于次年，即公元 1879 年，在英国皇家地理会刊的创刊号上，公开征求对“四色猜想”的解答。从此，“四色猜想”不胫而走，成为街谈巷议的热题。

但上述状态并没有持续很久。在征解消息发出的同年，一位半路出家的数学家肯普，发表了一个关于四色定理的证明。这使曾经出现的一时轰动很快平息下来。人们普遍以为“四色猜想”已经成为历史。不料过了 11 年，即公元 1890 年，一个名叫赫伍德的青年，指出了肯普在证明中的错误。从而使这一沉熄了 10 年之久的问题，又重新燃起了熊熊的烈火！与此同时，赫伍德

匠心独运，利用肯普提供的方法，成功地证明了用五种颜色能够区分地图上相邻的国家。这算是在向“四色猜想”进军中第一个重大的突破！

赫伍德关于“五色定理”的证明其实并不难。首先，他如同上图那样，对问题加以简化：即把原图上的每个顶点，换成围绕顶点的一个小区域。很明显，如果后一张地图能够用五种颜色染色，那么原图也一定能够用五种颜色染色。所以今后我们就只讨论顶点是三个国家界点的地图。

现在转到证明本身。设 f_2 是边界只有两个顶点的国家数；f_3 是边界有 3 个顶点的国家数；……显然，国家总数目 f：

$f=f_2+f_3+f_4\cdots\cdots$

由于 f_2 这类国家有两个顶点，因而有两条边界，从而这类国家共有 $2f_2$ 条边界。同理 f_3 类国家共有 $3f_3$ 条边界。如此等等。又由于每条边界都连接着两个国家。从而，边界总数目 e 满足：

$2e=2f_2+3f_3+4f_4+\cdots\cdots$

对于顶点总数目 v，同理有

$3v=2f_2+3f_3+4f_4+\cdots\cdots$

由上两式得：

$3v=2e$

根据上一节结尾证明的欧拉定理知道：

$v+f=e+2$

消去 e 可得：

$6f=3v+12$

即 $6(f_2+f_3+f_4\cdots\cdots)=(2f_2+3f_3+4f_4+\cdots\cdots)+12$

化简有：$4f_2+3f_3+2f_4+f_5=12+f_7+2f_8+\cdots\cdots$

由于上式右端不小于 12，因而左端必有一项大于 0。这样，赫伍德便得到了一个很重要的结论：“每张交点有三个国家相遇的地图，至少有一个国家边界数不多于 5。”

接下去赫伍德用了上一节讲到的数学归纳法：

【证】当国家数 $f=2$ 时命题显然成立。

假令 $f\leq k$ 时命题成立。即对所有交点有三个国家相遇，且国家数不多于 k 的地图，可用五种颜色染色。

则当 $f=k+1$ 时，根据前面讲的，这样的地图必有一个边数不多于 5 的国家。不妨令 A 就是这样的国家吧！

很明显，与国家 A 相邻的国家和区域，不外乎上页图中的三种情况：图 a 是有一个国家与 A 有两条边界；图 b 是与 A 相邻的两个国家，本身有共同的边界；图 c 是最常见的，不存在环形的情况。不难理解，无论上面三种情形的哪一种，在 A 的邻国中，总存在两个不相邻接的国家，如同上图的 A_1 与 A_3。

现在去掉 A 与 A_1、A_3 的边界，则新图有 $k-1$ 个国家，因而这样的图能用五种颜色染色。

设此时 $(A+A_1+A_3)$ 染甲色；A_2、A_4、A_5 分别染乙、丙、丁色。添上两条边界，变回原图，再让 A 染上第五种颜色。于是，原图已被用五种颜色染

色。

这就是说，命题对于 f＝k＋1 也成立。

综合上述，根据归纳假设，即针对于所有交点有三个国家相遇的地图，只要用五颜色染色就足够了！

赫伍德就这样证明了五色定理。

正因为五色定理的证明不很难，所以与费尔马猜想及哥德巴赫猜想不同，有不少数学家小看了四色猜想。相对论的创始人，伟大物理学家爱因斯坦的数学导师闵可夫斯基（Minkowski，1864～1909）教授，就是其中最为典型的一个。他认为四色猜想之所以没有解决，是因为世界上第一流的数学家还没有空去研究它。

有一次，教授给学生上课，他偶然间提到这个问题，随之即兴推演，似乎成竹在胸，写了满满一个黑板，但命题仍未得证。第二次上课，闵可夫斯基又继续推演，结果仍旧是满怀信心进教室，垂头丧气下讲台。如此这般折腾了几个星期之后，教授终于精疲力竭。一天，他走进教室，疲惫地注视着依旧着“证明”的黑板。此时适逢雷电交加，他终于醒悟，并愧疚地承认：“上帝在责备我，四色问题我无能为力！”这以后，全世界数学家都掂出了“四色猜想”的沉重份量。

人类智慧面对着又一个世界难题的挑战。在正面失利之后，数学家们决定从侧面进军！

1922 年，有人证明了国家数 f≤25 时四色猜想成立；1938 年，国家数 f 推进到 32；1969 年又推进到 45。47 个春秋，仅仅使国家数推进了 20。这确是一条布满荆棘、令人生畏的路！主要困难是构形的可能性太多，需要做两百亿次的逻辑判定，这远不是一个人的力量所能做到的！人们对此望而生畏了！

就在这时，科学的地平线上出现了一道曙光！电子计算机的运用，使四色猜想的证实有了希望。然而在 70 年代初，即使是电子计算机，也要连续算上 11 年半！这是何等艰难的目标，但人类并有没放弃这种机会，进军的号角吹响了！科学家们通力合作，一面不断改进方法减少判断次数，一面继续提高计算机的计算速度，使问题的解决终于有了眉目。

公元 1976 年 9 月，美国伊利诺斯大学的数学家阿沛尔和哈肯教授，运用每秒计算 400 万次的电子计算机,在运转 1200 小时后,终于成功地完成了“四色定量”的证明工作。

电波传来，寰宇震动！数学史上的三大难题之一，在人与计算机的“合作”下，终于被征服了！这是亘古未有的奇迹！为纪念这一历史性的时刻与史诗般的功绩，在宣布四色定理得证的当天，伊利诺斯大学邮局加盖了以下邮戳：

“Four colors suffice！”（四种颜色足够了！）

环面“七色定理”

传说古代有一位国王，他有五个儿子。老国王在临终前留下了一份遗嘱，要求在他死后把国土分成五块，每个孩子各得一块。不过，这五块土地中的每一块，都必须与其余四块相连，使得居住在每块土地上的人，可以不经过第三块土地，而直接到达任何一块土地去！至于每块土地的大小，则由儿子

们自己协商解决。

老国王死后，五个儿子为此大伤脑筋。想必亲爱的读者已经想到：若用莫比乌斯带，问题很快就会得到解决。

不过，不用莫比乌斯带，而用其它更为常见的曲面，问题也不见得无法解决。事实上，在一个救生圈那样的环面上，老国王的遗嘱同样可以执行。例如右图那样，环面的下半部为一个区域，而上半部划为四个区域，上述五个区域是两两相邻接的。

有趣的是：在环面上不仅可以解决国王五个儿子遗嘱的执行问题，即使老国王的儿子再多两个，问题同样也能解决！这就是说，在环面上我们找得到七个两两相邻接的区域。为了让读者对此看得一清二楚，我们设法对环面作一些处理，让环面剪开并摊成一个平面图形。显然，这只需剪两次我们的目的便能达到。不过，需要记住的是：摊开后图形的上下边界与左右边界，原先本是缝合在一起的！

下图是人们好不容易在环面摊开后的矩形图上找到的。图中的七个区域两两相邻接。如何把它设想成粘合后的环面图形，又如何说明上面的每个区域都与其它区域相邻接，这无疑对读者的思维是一次极好的锻炼！

下面画出的是相应于左图的环面区域划分示意，左边是正面，右边是反面，反面的区域界线已用虚线标在正面图里。读者只要细心对照一下便会发现，图中的七个区域确实两两相邻，这似乎比那矩形的地图更容易看些！以上事实表明：对于环面上的地图，至少要用七种颜色才能把不同的区域区分。实际上我们还可以证明：在环面上区分不同的区域，用七种颜色已经足够了！这就是著名的环面七色定理。

也许读者会这样想：四色问题已经弄得人们焦头烂额，如今“平面”换成“环面”，“四色”改为“七色”，岂不是更加高不可攀了吗？！

其实，七色定理的证明倒没那么难。这里我们先从环面上的“欧拉示性数”讲起。

大家已经知道，对于球面上的连通网络，其顶点数 V，区域数 F 和弧线数 E 之间，存在以下关系：

V+F-E＝2

这里的“2”，对于球面是个常量，称为“球面欧拉示性数”。

那么，在环面上情况又将如何呢？让我们看一看球面与环面之间到底有什么关系。

一个环面是可以用以下方法变为球面的：把环面纵向剪断，成为两端开口的筒形。现在用两个面（上图中阴影部分）把开口圆筒的两头封起来，变为闭口圆筒，然后对它充气，使它膨胀成球状形。只是球面的上头有两块像人脸上眼睛那样的区域，是原先环面所没有的。因此，一个环面上的连通网络，在变为充气球面上的连通网络时，网络的顶点数和弧线数没有改变，区域数则多了两个。从而，对于环面上连通网络而言，其顶点数 V、区域数 F 和弧线数 E 之间有：

V+F-E＝0

这就是说，环面上的欧拉示性数为 0。

下面我们再回到证明环面的“七色定理”。假定环面上的地图是已经标准化了的，即地图上的每个顶点都具有三个分支（否则可以如同下图，在各顶点周围画一个小区域，使新的地图的顶点，都变成三个分支的）。由于每

个顶点都有三条弧线发出，又每条弧线都具有两个端点。从而

$3V = 2E$

代入环面上的欧拉公式

$V+F-E = 0$

立得 $E = 3F$

上式表明，在环面上的标准化地图里，必有一个边数小于 7 的区域！因为如果所有区域的边数都不小于 7，便会有：

$2E \geq 7F > 6F = 2E$ 从而引出矛盾！

由于环面上的地图必有一个小于七边的区域，因而，我们可以如同下图那样，把这一区域折掉一条边，得到一幅新的地图。如果新图能够用七种颜色染色，那么把拆去的边界添加进去后的原图，显然也能够用七种颜色染色！不过，新的地图已经比原来地图少了一个区域。对于这样的新地图来说，自然也存在一个小于七边的区域，因而同样可以拆掉一边得到一幅更新的地图。如果这更新的地图能用七色染色，那么新地图，从而原地图也一定能用七色染色。以上步骤可以一直进行下去，区域数不断减少，最后少到只有七个，当然能用七色染色，从而原地图能用七色染色也就勿庸置疑了。

巧捏橡皮泥

拓扑学是一门研究一对一连续变换的几何学。公元 1902 年，德国数学家豪斯道夫用邻域的概念代替了距离，得出了一套完整的理论系统。在这一理论中，拓扑变换是一种不改变点的邻近关系的，一对一的连续变换。

橡皮膜上的图形，通过拉扯，弯曲和压缩，只要不扯断或把分开的部分捏合，就能保持一对一和点的邻近关系，所得到的前后图形是拓扑等价的。同理，一块橡皮泥只要不撕裂、切割、叠合或穿孔，便能捏成一个立方体、苹果、泥人、大象或其它更复杂的物体，但却无法捏出一个普通的炸面圈或纽扣，因为后者中间的空洞，是无论如何也拉不出来的！

显然，上面讲的捏橡皮泥，是一种保持点与点邻近关系的拓扑变换。但拓扑变换并非都能通过捏橡皮泥的办法得到。

读者可能还记得那个由数学家创造出来的怪瓶子——“克莱茵瓶”吧！它可以想象成是把一个车辆的内胎，先是切断并拉直成圆柱；然后再把其中的一头撑大，做成一个底，另一头则拧细像一个瓶子的颈部；接着，如图把细的一头弯过来，并从气门嘴插进去；最后，把细的这一头也撑大，并与原先已撑大的那一头连结起来！不过这种连接要求做得“天衣无缝”，使所有切断前相同的点，连结后仍是同一个点。这样做尽管在客观上未必可能，但在拓扑学上却是允许的。

捏橡皮泥的科学是奇特而有趣的，有些问题即使想象力很丰富的人，也难免要费一番功夫！

下面是一道奇妙而古怪的问题：有三个橡皮泥做成的环，如同右图套在一起，一个大环穿过两个连在一起的小环。

请你用捏橡皮泥的办法（注意！既不能拉断，也不允许把分开的部分捏合）把其中的一个小环从大环中脱出来，变成右图那样。

下图将使你看到一种精妙绝伦的捏法。

下面是又一道妙题，对读者来说无疑是一道绝好的练习。

图 1 是由橡皮泥做成的三个环。第三个环与头两个环相连，而头两个环则相互套着。请问，你能否用捏橡皮泥的办法，把它捏成箭头方向所示的，两个连结着的环？

为了让读者想象力有一个尽情发挥的机会，我们特意把解答留在本节的末尾。

可能有的读者会问：既然拓扑学中允许一个空间形体，像橡皮泥那样捏来捏去，那么在我们生活着的空间里，什么样的形体才称得上本质不一样的呢？也就是说，应该怎样对空间图形进行拓扑分类呢？这的确是一个新鲜而有趣的问题。

空间的情形虽然很复杂，不过，有一点是肯定的：凡是能通过捏橡皮泥的办法变换得到的图形，一定属于拓扑同类。一般地，在拓扑学中数学家们提出的分类依据是：看一个图形需要切几刀才能变为像球那样的简单闭曲面。例如，一个环面需要切一刀才能变换为球面（环面上的洞对于拓扑学分类的定义来说，只占很次要的地位），而以下的图形则需切两刀才能变换为球面。数学家们正是根据这种需要切的刀数，以及曲面的单侧性和双侧性对图形进行分类的。图 2 中的两个迥然相异的图形，在拓扑学中竟然能够属于同一类，这大约是许多读者所万万没有料到的！

最后，读者一定很想知道，自己对那道“ 三环变两环 ”的巧捏橡皮泥的问题，是否想象得对头，以下解答可供参照，但愿你能成功！

拓扑魔术

本文让读者看几个拓扑魔术。

看后你不仅会享受到一种成功的欢悦，甚至还乐于充当其他观众的“ 小老师 ”！

纸片上有一个两分硬币大小的圆孔，问伍分的硬币能通过这样的圆孔吗？当然，纸片是不允许撕破的！

“ 大硬币通过小圆孔 ”？！

读者可能感到不可思议，因为答案几乎是“ 明摆着 ”的，大圆怎么可能穿过小圆呢？

原来只要硬币的直径不超过圆孔直径的一倍半，上面的要求是可以做到的。这一简单拓扑魔术的窍门，读者只需看一看左面的示意图便会明白。

莫里哀（Moliere，1622～1673）是 17 世纪著名的法国戏剧大师。他曾经写过以下一段话：“ 我在巡回演出中到过法国南部，在那里看见有一个人，用两米多长的绳子结成环，套在手腕上，而且这只手又紧紧地抓住内衣的下襟。他严格遵守着以下两条规定：一是绳子既不能解开，也不允许剪断；二是内衣既不脱掉，也不剪破！但却不消几分钟，就把套在手上的环绳抽了出来。 ”

莫里哀的这道题，从表面看似乎不太可能。然而只要细心观察一下就会发现：虽然魔术表演者的右手紧紧地拽住了背心的下襟，但是背心与人体之间实际上处于分离的状态。因而套在手腕上的绳子，完全可以利用背心与人体之间的空间，从中抽掉！下图显示了这一具体的脱离过程。

莫里哀问题如若允许脱下背心，则结论会更加明显些。因为假如表演者把背心脱下，此时无异于在他的手上提了一件背心，又挽了一条风马牛不相

及的绳子。现在要想脱下绳子那是易如反掌的事！

有了莫里哀问题的解答作基础，读者探求以下的魔术奥秘，也就不会有太大的困难了！

这一魔术要求表演者穿一件背心和一件外衣。为了表演的方便，也为了让观众看得更清楚，外衣最好不扣扣子。表演的最终目的是：当着观众的面，穿着外衣而把里面的背心脱掉！这个魔术表演的解答，也就留给读者了！

另一个极为有趣的拓扑魔术叫“盗铃”：一条薄皮带，上面有两道缝，下端有一个孔，一条非常结实的绳子，如图穿过这些孔和缝，并在两端系上两个大铃，现在要你想法把铃连同系它们的绳子，一道从皮带里取下来。

读者千万不要以为这道题利用本节开始“大硬币过小圆孔”的方法就可办到。实际上，这里的大铃比小洞要大上许多，要想让铃穿过洞是绝对不可能的！要解决这道问题需要克服习惯的偏见。人们把柔软的绳子与宽皮带相比，更容易在绳子的移来拖去上动脑筋。其实，这道题需要动的恰恰正是宽皮带！

在莫里哀的问题中我们已经埋下了伏笔，在那里我们曾经介绍过一种绳子不动，背心动的方法。这种方法正是出自一种破除常规的思考。魔术“盗铃”用的也是这种异乎寻常的想法，其最精彩之处在于：把人们最不愿意变动的皮带，如同左图变形了一下，让皮带中两条缝间的窄长的小带，通过小孔穿到下方去，而绳子却在原位挂着！至于接下去的脱铃办法，无疑已经水落石出了！

还有一种颇为新颖的拓扑魔术，它联系着一则扣人心弦的故事。说是从前有一位国王，把两名反对者以莫须有的罪名抓进了监狱。狱中牢房的墙跟有一个小洞，一个人可以爬过。为了防止犯人逃跑，国王命令用手铐和铁链把两人的手，如同左图互相套着锁在一起。现在，这两位反对者面临着的问题是：如何使两人分开，然后通过小洞一个个逃出去？

亲爱的读者，在这生与死的搏斗中，你愿意用自己的智慧帮助帮助这两位无辜的犯人吗？

可能你已经想出办法，这是应该值得庆贺的！假如你一时还没想出来，那就请你看一看下边的图吧！它提示我们：某甲应该把自己手铐上的铁链，如图所示从某乙的手铐缝隙中穿过去，然后再套过某乙的手，这样两人就可以分开了！

下面是一个在拓扑魔术中蔚为奇观的节目，叫“巧移钥匙”：如图，一根细绳与木条系在一起。在绳子靠右的一段穿着一只钥匙。木条中间的大孔比钥匙小。

钥匙不可能从大孔中穿过！现在要求把右边的钥匙巧妙地移到左边一头去。当然，在移动过程中是不允许解下或剪断绳子，也不能撕裂或损坏木条的！

这一颇有难度的魔术表演，过程如下图。不过，光靠看图似乎还不够，最好能自制一副道具，照着图反复练习：

如图（1），先把绳环 A 往下拉，使之扩大，并把钥匙穿过 A 环；接着，用手捏住 B 绳和 C 绳，一同向下拉，直至把木条下面的绳子通过大孔从后面拉到前面来，形成图（2）的 B、C 两个绳环；现在我们把钥匙一齐穿过 B、C 两个绳环，使之像图（3）那样移到左边来；然后从大孔的后面，把绳环 B 和绳环 C 一同拉回去，冉向下拉动绳环 A，使其扩大；最后再像图（4）那样，

把钥匙从绳环 A 中穿过去；现在拉紧绳子，钥匙就在左边了！

最后让我们看一个貌相类似的问题，它与上面问题不同的地方在于：原来系在木条上的绳头，现在改为穿过两个小孔；绳端系着大纽扣，为的是防止绳子脱落。魔术同样要求把钥匙移到左边。不过，它可有简单得多的办法呢！这倒有一点像“犯人逃脱”故事中用的手段，具体办法就留给读者了！

巧解九连环

九连环是由九个相同的，一个扣着一个且带着活动柄的金属环，和一把剑形的框套组成。所有金属环上的活动柄，都固定在一根横木条上。游戏者的目的，是要把九个金属环逐一地从剑形框中脱下来，形成环和框分离的状态；或者从原先分离的状态出发，恢复成上图一环扣一环的样子。

九连环在我国民间源远流长。大约在 16 世纪以前，传到国外。最早见自公元 1550 年出版的，著名意大利数学家卡当（Cardano，1501～1576）的著作，称之“中国九连环”。公元 1685 年，英国数学家瓦里斯对此作了详细的数学说明。19 世纪的格罗斯，用二进位数给了它一个十分优美的解答。

下面让我们研究一下解九连环的一些规律。为方便起见，我们把脱下 k 个环所需要的基本动作数记为 f（k）。上图所示的两种脱环手法，每一种我们都称为一个基本动作。很显然，脱下一个环只需要一个基本动作（Ⅰ），即而脱下两个环，则需先把第二个环退到剑形框下（基本动作Ⅱ），然而再脱第一个环（基本动作Ⅰ），因此共需两个基本动作，即有为了求得 f（n）的一般表达式，今设头 k 个环已用 f（k）次的基本动作脱下。现在，用基本动作Ⅱ把第 k＋2 个环退到剑形框下；接下去又用 f（k）次基本动作将原来已经脱下的 k 个环还原；最后再用 f（k＋1）次基本动作把头 k＋1 个环脱下。以上的一连串动作，显然对已脱下的第 k＋2 环毫无影响。因此，此时我们实际上已经把头 k+2 个环脱了下来。注意到脱下头 k＋2 个环所需的基本动作数为 f（k＋2），从而有：

$f(k+2)=f(k)+1+f(k)+f(k+1)$

$=f\ k+1)+2f(k)+1$

把上式变形为

$[f(k+2)+f(k+1)]=2[f(k+1)+f(k)]+1$

令 $U_k=f(k+1)+(k)$

则 $u_k+1=2uk+1$

同理 $2u_k=2^2u_{k-1}+2$；

$2^2u_{k-1}=2^3u_{k-2}+2^2$；

… …

$2^{k-1}u_2=2^ku_1+2^{k-1}$

将以上 k 个等式相加，并消去等式两端相同的项得：

$u_{k+1}=2^ku_1+(1+2+2^2+\cdots+2^{k-1})$

$\because u_1=f(2)+f(1)=2+1=3$

$\therefore u_{k+1}=3\cdot 2^k+2^k-1=2^{k+2}-1$

这样，我们便有以下两个关于 f（k）的递推式子：

$$\begin{cases} f(k+2)+f(k+1)=2^{k+2}-1 \\ f(k+2)-f(k+1)=2f(k)+1 \end{cases}$$

将以上两式相加得：

$f(k+2)=f(k)+2^{k+1}$

$f(2m+2)=f(2m)+2^{2m+1}$

$=f(2m-2)+2^{2m+1}+2^{2m-1}$

$=\cdots\cdots$

$=f(2)+(2^{2m+1}+2^{2m-1}+\cdots+2^{3})$

$=2+2^{3}+2^{5}+\cdots+2^{2m+1}$

$=\frac{2}{3}(2^{2m+2}-1)$

即此时有 $f(k)=\frac{2}{3}(2^{k}-1)$

同理，当 $k=2m+1$ 时有

$f(k)=\frac{1}{3}(2^{k+1}-1)$

综上，对于任意的自然数 n，我们有：

$$f(n)\begin{cases} \frac{1}{3}(2^{n+1}-1);(n\text{为奇数}) \\ \frac{2}{3}(2^{n}-1);(n\text{为偶数}) \end{cases}$$

由以上公式，可以计算出九连环数列$\{f(k)\}$：

1，2，5，10，21，42，85，170，341。

因此，巧解九连环，必须进行 341 次基本动作。由于脱环的过程必须做到眼、手、脑并用，而且基本动作之多，少说也要花上五分钟的时间，所以从事这项游戏，对于人们的智力和耐性，都是一个极好的锻炼！

揭开“十五子棋”的奥秘

有一种图形还原游戏，叫“十五子棋”：在有 16 个方格的盒子里，装着 15 块标有从 1 到 15 的数字的小方块，并留有一个空档。开始时，小方块是按随意的顺序放进盒子里的。游戏的要求是：有效地利用空格，调动小方块，使盒子小方块的数字还原到下图的正常位置。这样做可能吗？

这是一个相当简单的游戏，几乎人人一看就会明白。然而有时我们能够轻易取得成功，但有时无论我们如何努力，却无法取得成功！那么奥妙究竟在哪里呢？

可能读者都已注意到，空格是能够移动到盒子的任何位置的。我们也很容易利用空格把方块 1、2、3 依次调动到各自正常的位置上去。不过，当这三个棋子安顿好之后，想不动方块 3 而把方块 4 也移到正常位置上，却似乎有些为难。然而，用下图的办法我们却能实际上做到这一点。这里要动到的只是一块 2×3 方格的区域；而且很显然，只要有一块 2×3 的方格区域，就一定能够做到这一点！方块 3 虽然动了一下，但后来又恢复到原先的位置。

现在方块 1、2、3、4 已经在正常的位置上。接下去方块 5、6、7、8 也

可以同样恢复到正常位置。再接下去我们还可以把方块 9 和 13 移到各自正常的位置上。此时我们仍有 2×3 方格的地盘，正如前面说过的那样，在这一区域，我们依然可以把方块 10 和 14 各自安顿在正常的位置上。

至此，我们已经安顿好了 12 个方块，它们都已安在各自正常的位置上。剩下的位置是三个方块 11、12、15 和一个空格。我们还容易把 11 移到自己的位置，而把空格移至盒子的右下角。这时可能出现两种形式：

第一种是图（Ⅰ）的形式，此时所有的方块都已在正常的位置上，这表明我们已经取得了成功。第二种是图（Ⅱ）的形式。现在的问题是：图（Ⅲ）的形式还能不能通过移动变为图（Ⅰ）的形式呢？

答案是否定的！

事实上我们可以把所有盒子里的方块看成一个数的顺列，而把空格当成数 16。这样，图（Ⅰ）的顺列为：

1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13，14，15，16。

而图（Ⅱ）的顺列则为：

1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，15，13，14，12，16。

现在读者看到：图（Ⅱ）的顺列与图（Ⅰ）正常的顺列相比，其中有些数字的位置被打乱了，有些大的数跑到小的数的前面去，这种现象我们称为“逆序”。逆序可以采用点数的办法算出来。例如图（Ⅱ）的顺列，前 11 个数都没有出现逆序，而后面的 5 个数为：

15，13，14，12，16。

其中 15 跑到 13、14、12 这三个较小数的前面，因而出现了三个逆序；而 13，14 跑到 12 的前面，这里又出现了两个逆序。此外再也没有其它逆序了。因此图（Ⅱ）的顺列共有 5 个逆序。

稍微认真分析一下，读者便会发现：在“十五子棋”中，方块和空格的移动，都不会引起原先顺列逆序的奇偶性的改变！由于图（Ⅰ）的顺列为偶逆序，而图（Ⅱ）的顺列为奇逆序，因而（Ⅱ）的形式是不可能通过方块棋子的移动变为图（Ⅰ）形式的。这就是为什么“十五子棋”有时能够成功，而有时不能成功的道理！

如何使邮递线路最短

大家知道，邮递员为了完成投递任务，每天必须从邮局出发，走经投递区域内的所有道路，最后返回邮局。邮递员应当怎样安排自己的投邮路线，才能使邮递线路最短呢？这显然是邮递员所苦恼的问题。

下面让我们分析一下邮递线路问题的实质。

很清楚，投递的线路必须是连通的。因而，对某个邮递员来说，他所负责的投邮路线，可以看成是一个脉络。

如果上述脉络所含的全是偶点，那么脉络中的所有弧线，便能形成一条封闭的回路。此时，求最短邮递线路，实际上就是一笔画问题。而且邮递员从邮局出发，最后回到了邮局，完成了一次循环。

如果一个邮递网络，除了偶点之外还含有奇点，由于网络的奇点必定成双，因而我们可以将奇点分为若干对，在每对奇点之间用弧线连接，使添加弧线后的新图形成为不含奇点的脉络。前面说过，这样的脉络的全部弧线，可以构成一条封闭回路，从而为邮递员提供了一条可行的投邮线路。

下图是一个简单的例子。图中的方格状道路网代表投邮区域；“★”为邮局；奇点间添加的弧线画成虚线，相应的投邮路线为：

K（★）→H→G→F→E→D→C→B→A→I→A

→B→J→D→E→K→J→I→H→K（★）。

容易算出这条投邮路线的总长度为 140 个单位。

读者可能已经注意到：对于一个网络，奇点间用弧线联接的方法是多种多样的，各种添加的方法都提供了一种可行的投邮路线。问题是：哪一种投邮路线才是最合理的呢？

答案几乎是显而易见的！即添加进去的弧线应当越短越好。要达到这一点，必须做到以下两点：

（甲）添加进去的弧线不能出现重叠；

（乙）在每一个圈状的道路图上，添加进去的弧线，其长度的总和不能超过该圈长的一半。

用上面两条原则，判断一下前面例子中的那种弧线的添加方法，就会发现其中有不合理的地方。在[ABKH]圈中，添进弧线的总长度，显然大于该圈长度的一半！

对于添加进去弧线的总长度大于圈长一半的情形，有一种简单易行的调整办法，可以使得添加弧线的总长度小于半圈长。这种方法读者只要看一看下图，便会明了：

即在该圈中，撤去原先添加的弧线，改为添加原先没有添加的部分。这样做，网络所有顶点的奇偶性都没有改变，但却使总弧线的长度减小的，其道理是显而易见的！现在回到前面的例子上来。按上面的办法调整后可得下图。此时，相应的投邮路线为：

K（★）→J→K→H→G→F→E→D→C→B→A

→I→H→I→J→B→J→D→E→K（★）。

投邮路线的总长容易算得为 132 个单位，比原先净少了 8 个单位。读者不难看出，所得的新的网络（下图）已经符合前面提到的（甲）、（乙）两条原则，因而相应投邮线路已是最为合理的了！

邮递线路问题的解决，是奇偶点原理与图上作业法的科学结合，是数学知识古为今用的典范。以下生动的口诀，将帮助你记住这一有用的方法：“先分奇偶点，奇点对对联；联线不重叠，重叠要改变；圈上联线长，不得过半圈。”

折纸的学问

早在公元前的古希腊，人们便深为五角星的魅力所吸引。右图是那时毕达哥拉斯学派的信徒们，作为俱乐部成员徽章的图案。图中的象征性数字，及如同现代立交桥那般的立体线条，使人们似乎感觉到一种无穷的运动，周期为 5，循环反复，永不休止！

大约不少读者在孩提时代，就已学会了用折纸的办法来剪五角星。下图直观地表现了这一折法的过程。图中的罗马数字，表示折痕的先后顺序，至于折五角星的原理，我想读者看图自明。

折纸的艺术，貌似简单，内里往往包含着深刻的科学道理。折纸的方法也远不是单一的。就以折正五角星来说，人们完全不必用上面那样繁杂的折

叠手续！实际上只要打一个普通的结也就足够了！

左图的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ形象地表现了打结的过程，所用的道具只是一条长长的纸带而已！可以肯定地说：在此之前，并不是所有的人都知道，我们天天司空见惯的打结动作，实际上正在创造着一个又一个优美的正五角星。图Ⅳ是将图Ⅲ举到亮光下，使人透过外表看到内部的五星图形！读者如能亲自试验一下，一定会有感于大自然赐给的这一奇景！

可能读者中会有人以为，折纸只能折出直线的图形，因为折痕无论如何只能是直的。其实，这是一种误解！足够多的直的折痕，有时也能围出优美的曲线。

请你用纸剪出一个矩形纸片 ABCD。如同下页左图那样折叠，使每次折后 A 点都落在 CD 边上。无数的折痕会像下页右图那样围出一条曲线。这样的曲线，在几何学上称为折痕的包络。包络曲线是一段抛物线弧。

当你抛掷石子的时候，你会看到石子在空中划出一条美丽的弧线。这条弧线是由于石子同时受地心引力和惯性运动两者作用的结果。假定你抛掷石子时与水平成α角，又石子出手时速度为 v_0，则在时刻 t 石子运动的位置坐标（x、y）为：

$$\begin{cases} x = u_o t cs\alpha \\ y = u_o t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

消去时间 t 后，将得到一个关于 x 的二次函数。因此，二次函数的图像，我们也称为抛物线。有趣的是，当我们抛掷的初速度不变，而仅仅改变抛掷角时，将会得到如同下图那样一系列的抛物线，这无数抛物线的包络，也形成一条抛物线，物理学上称为“安全抛物线”。假如读者有机会欣赏喷水池中喷射出的美丽水帘，那么你将领略这一想象中包络曲线的特有风采！

让我们回到折线的课题上来，研究一下为什么前面讲到的折痕包络是一条抛物线？

如下页左图，以 AD 的中点 O 为原点，以 OD 为 Y 轴正向，建立直角坐标系。令 $AD = p$，则 A 点的坐标为（0，$-\frac{P}{2}$）；设 A^1 为 CD 上的任意一点，EF 为 A 折向 A^1 时纸上的折痕；T 在 EF 上，满足 $TA^1 \perp CD$。下面我们证明：T 点的轨迹，即为折痕的包络曲线。

事实上，令 T 点的坐标为（x、y）

$$\because \begin{cases} A^1T = (\frac{P}{2} - Y) \\ AT = \sqrt{x^2 + (y + \frac{p}{2})^2} \\ A^1T = AT \end{cases}$$

$$\therefore (\frac{p}{2} - y)^2 = x^2 + (y + \frac{p}{2})^2$$

整理得 $y = -\frac{1}{2P} x^2$

也就是说，T 点的轨迹是一段抛物线弧。剩下的问题是，必须证明它与

折痕相切。为此，令直线 AA^1 的斜率为 k，则

$$k=\frac{P}{x_A}$$

注意到折痕 EF 为线段 AA^1 的垂直平分线，容易求出直线 EF 的方程为：

$$y=-\frac{x_{A_1}}{P}(x-\frac{x_{A_1}}{2})$$

可得 $x^2-2xx_{A},+(x_{A},)^2=0$

$\triangle=4(x_{A},)^2-4(x_{A},)^2=0$

从而，直线 EF 与曲线相切。这就证明了所求的抛物线，确实是折痕的包络。

包络是微分几何研究的课题之一，公元 1827 年，首创于德国数学家高斯。

下面是又一种有趣的折纸包络。

剪一个圆形纸片，在圆片内任取一点 A，然后折叠纸片，使折后的圆弧通过 A 点，如此得到的无数折痕。这些折痕的包络，便是一个以 A 点和圆心为焦点，长轴与半径等长的椭圆。读者不妨亲自折一个试一试。

最为神奇的折纸，大约莫过于“三浦折叠法”。它是由日本宇宙科学研究所的三浦公亮教授发明的。这种折纸法，竟能使无生命的纸张具有“记忆”的功能！

大家知道，当我们想把一大张纸折小的时候，我们常用的是互相垂直的折叠方法。这种折叠法的折痕是“山”还是“谷”是互相独立的。从而各种可能的折法组合，总数极大！当一大张折好的纸完全展开时，很难让它重新折回到原来的位置。另者这种互相垂直的折法，折缝往往叠得很厚，因而在张力的作用下，难免于造成破损！

“三浦折叠法”也叫“双层波型可扩展曲面”，它不同于“互相垂直折叠法”的地方在于：纵向折缝微呈锯齿形。这样，当你打开一张用三浦方法折叠的纸时，你会发现：只要抓住对角部分往任何方向一拉伸，纸张便会自动地同时向纵横两个方向打开。同样，如果想折叠这样的纸张，只需随意挤压一方，纸便会回到原状，相当于记住了原样！

用三浦方法折叠纸张，整张纸成了一个有机的连结体。它的折缝组合，只有全部展开与全部折返两种。因而不会因为折叠时折缝没有对齐而损坏。下图的右方表示用“三浦折叠法”折叠时的情景。容易看出，这里的折缝是互相错开的。是普通折叠法，不难发现：这里的折缝，在重叠处出现了危险的隆起！

今天，神奇的三浦折纸法已经取得了广泛应用。在人类征服太空的宏图中，对于建造大面积的太阳帆、人造月亮等方面，应用前景尤为诱人！

射影几何的起源

在欧洲文艺复兴时期，许多著名的画家，包括多才多艺的达·芬奇，以他们非凡的技巧和才能，为透视学的研究，作出了卓越的贡献。他们的成果，很快地影响到几何学，并孕育出一门新的几何学分支——射影几何。

所谓射影是指：从中心 O 发出的光线投射锥，使平面 Q 上的图形Ω，在

平面 P 上获得截景 Ω^1。则 Ω^1 称为 Ω 关于中心 O 在平面 P 上的射影。

射影几何就是研究在上述射影变换下不变性质的几何学。

为射影几何的诞生奠基的，是两位法国数学家：笛沙格（Desargues，1591～1661）和帕斯卡（Pascal，1623～1662）。

公元 1636 年，笛沙格发表了题为《用透视表示对象的一般方法》一书。

在这本书里，笛沙格首次给出了高度、宽度和深度“测尺”的概念，从而把绘画理论与严格的科学联系起来。

公元 1639 年，笛沙格在平面与圆锥相截的研究中，取得了新的突破。

他论述了三种二次曲线都能由平截面圆锥而得，从而可以把这三种曲线都看盾成是圆的透视图形。这使有关圆锥曲线的研究，有了一种特别简捷的形式。

不过，笛沙格的上述著作后来竟不幸失传，直到 200 年后，公元 1845 年的一天，法国数学家查理斯，由于一个偶然的机会，在巴黎的一个旧书摊上，惊异地发现了笛沙格原稿的抄本，从而使笛沙格这一被埋没了的成果，得以重新发放光辉！

笛沙格之所以能青史留名，还由于以下的定理：如果两个空间三角形对应顶点的三条联线共点，那么它们对应边直线的交点共线。这个定理后来便以笛沙格的名字命名。

有趣的是：把笛沙格定理中的“点”改为“直线”，而把“直线”改为“点”，所得的命题依然成立。即如果两个空间三角形的对应边直线的三个交点共线，那么它们对应顶点的联线共点。

在射影几何中，上述现象具有普遍性。一般地，把一个已知命题或构图中的词语，按以下“词典”进行翻译：

将得到一个“对偶”的命题。两个互为对偶的命题，要么同时成立，要么同时不成立。这便是射影几何中独有的“对偶原理”。

射影几何的另一位奠基者是数学史上公认的“神童”法国数学家帕斯卡。

公元 1639 年，帕斯卡发现了以下使他名垂青史的定理：若 A、B、C、D、E、F 是圆锥曲线上任意的六个点，则由 AB 与 DE，BC 与 EF，CD 与 FA 所形成的三个交点共线！

帕斯卡的这个定理，精妙无比！它表明一个圆锥曲线只需五个点便能确定，第六个点可以通过定理中共线的条件推出。这个定理的推论多达 400 余条，简直抵得上一部鸿篇巨作！

不料，帕斯卡的这一辉煌成果，竟引起了包括大名鼎鼎的笛卡儿（Descartes，1596～1650）在内的一些人怀疑，不相信这会是一个 16 岁孩子的思维，而认为这是帕斯卡父亲的代笔！不过，此后的帕斯卡成果累累：19 岁发明了台式加减计算机；23 岁发现了物理上著名的流体压强定律；31 岁与费尔马共同创立了概率论；35 岁对摆线的研究取得了重大成果；……帕斯卡这一系列接踵而至的成就，终于使所有持怀疑态度的人折服了！

不幸的是：笛沙格和帕斯卡这两位射影几何的先躯，竟于公元 1661 年和 1662 年先后谢世。此后，射影几何的研究没有得到人们的应有重视，并因此沉寂了整整一个半世纪，直至又一位法国数学家彭色列的到来。

彭色列与射影几何理论的创立

在射影几何的故乡法国，两位奠基者的相继去世使这门学科的研究沉寂了一个半世纪，直至后来出现了另一位数学家彭色列。

彭色列（Poncelet，1788～1862）1788 年 7 月出生于法国的梅斯城。22 岁毕业于巴黎的一所军事工程学院。曾受业于著名的数学家，画法几何的奠基人蒙日（Mongr，1746～1818）和卡诺（Carnot，1753～1823）。彭色列大学毕业后即投入了拿破仑的军队，担任一名工兵中尉。

公元 1812 年，叱咤风云纵横一世的拿破仑，被一系列胜利冲昏了头脑。为了实现他称霸欧洲的宿愿，终于走出了一步冒险的“棋”：决计亲率 60 万大军，远征莫斯科！不料沙皇亚历山大一世，起用了老谋深算的将军库图佐夫为总司令，毅然避开了法军的锋芒，把拿破仑的军队引进了坚壁清野了的莫斯科。此后法军，困守空城，饥寒交迫，又被库图佐夫拦断西退的去路，终于面临绝境！

此时的彭色列，服役于远征军的纳伊军团。当拿破仑为摆脱困境而决计西撤时，俄军大举反攻，致使法军近乎全军覆没。公元 1812 年 11 月 18 日，纳伊军团被歼。顿时，血溅沙场，尸横遍野。彭色列也受了重伤，混迹于尸首群中。

当俄国军队清扫战场的时候，发现这个受了伤的法国军官一息尚存，于是被抓了起来，作为一名俘虏，送回到俄国的后方。彭色列因此侥幸拣得了一条性命。

翌年 3 月，彭色列被关进了伏尔加河岸边的沙拉托夫监狱。开始的一个月，他面对铁窗，万念俱灭！随着春天的到来，明媚的阳光透过铁窗的栏栅，投进了监狱的地面，留下了一条条清晰的影子。这一切突然引发了彭色列的联想，往日蒙日老师的“画法几何”和卡诺老师的“位置几何”，历历在目。彭色列觉得：回味和研究往日学过的知识，是百无聊赖中最好的精神寄托！

此后的彭色列利用一切可能利用的时间，或重温过去学过的数学知识，或潜心思考萦回于脑际的问题；在射影变换下图形有哪些性质不变？当时监狱的条件极差，没有笔也没有纸，书就更不用说了。然而这一切并没有使彭色列气馁！他用木炭条当笔，把监狱的墙壁当成演算和作图的特殊黑板，还四方搜罗废书页当稿子，就这样经过了 400 个日日夜夜，终于写下了七大本研究笔记，记述了一门新数学分支——射影几何的光辉成果！

公元 1814 年 6 月，彭色列终于获释。同年 9 月，他回到了法国。回国后虽然他升任工兵上尉，但仍孜孜不倦地追求新几何学的理论。在七本笔记的基础上，又经过 8 年的努力，终于在公元 1822 年，完成了一部理论严谨、构思新颖的巨著——《论图形的射影性质》。这部书的问世，标志着射影几何作为一门学科的正式诞生！

彭色列的研究是从“交比”的概念开始的：S 为中心，从 S 发出的四条射线 a，b，c，d 组成了一个固定的线束 S（abcd）。一直线 ι 分别交线束于 A，B，C，D 四点。彭色列证明了交比 γ：

对于线束 S（abcd）来说，是一个不变量。这就是说，如果另一条直线 ι'，依次交线束于 A'、B'、C'、D'，则有：

（A'B'C'D'）=（ABCD）

这是一个与截线 l 的取法无关的量。也就是说，对固定的线束 S（abcd），交比 γ 是射影变换下的一种不变量！

下面我们看看线束的一些有趣特性。

今有线束 S 和它在直线 ι 上的透视点列（σ）。从中心 S＇向点列（σ）投射，得到线束 S＇，用直线 ι＇把线束 S＇截断，得出透视点列（σ＇）。

再从中心 S"向点列（σ＇）投射，得到线束 S"，用直线 ι"把线束 S"截断，得出透视点列（σ"）……。很明显，以上所有的线束和点列，其任意四个相应的元素组，总有相同的交比。

射影变换下交比的不变性，及以上介绍的投射法和截断法，正是彭色列用以研究射影几何独特理论系统的基础。

下面让我们看一个用射影几何的方法才能解决的具有典型意义的问题：

已知圆锥曲线的五个点 A，B，C，D，E，试求该曲线与已知直线 g 的交点。

为方便读者对照掌握，今将求法分述如下：

在圆锥曲线已知的五点中，取 A，B 两点作为线束的中心，如图作关于点 C、D、E 的三对对应直线。

线束 A 和线束 B 为已知直线 g 所截断，得到了两个射影点列：

（C_1，D_1，E_1，…）和（C_2，D_2，E_2，…）

很明显，直线 g 与圆锥曲线的交点 P、Q，即为以上两个点列的相重点。为了求出这两个相重点，我们可以利用一个圆，在圆上取一点 S 为中心，把直线 g 投射到圆上。这样，我们将在圆上得到相应的两个射影点列：

（C'_1，D'_1，E'_1，……）和（C'_2，D'_2，E'_3，…）

如果我们求得了这两个点列在圆上的相重点 P＇，Q＇，我们实际上也就求得了直线 g 与圆锥曲线的交点 P、Q。

今取 C'_1、C'_2 作为圆上射影对应的线束中心，并作透视轴 x。显然，透视轴 x 可由以下两对直线的交点决定：

$C'_1D'_2$和 $C'_2D'_1$；

$C'_1E'_2$和 $C'_2E'_1$。

透视轴 x 与圆的交点 P＇，Q＇，无疑就是圆上相应二次射影点列的相重点。从而，由中心 S 把 P＇，Q＇投射到直线 g 上，所得到的点 P、Q，必然也是圆锥曲线上相应二次射影点列的相重点。这就是所求的直线 g 与圆锥曲线的交点。

趣味的圆规几何学

据说拿破仑对于只用圆规的几何作图问题极感兴趣，他曾给当时法国数学家出过一道题目：“仅用圆规而不用直尺请把已知圆周四等分”。

拿破仑的这道题，如果给定圆的圆心是已知的，就不算难。下图表明了一种作法：

在已知圆 O（r）上任取一点 A。然后，从 A 点开始，用圆规量半径的方法，依次在圆用上作出 B、C、D 三点。再作圆 A（AC）交圆 D（DB）于 E 点。最后，作圆 A（OE）交已知圆 O（r）于 P、Q 两点，则 A，P，D，Q 四点把圆 O 四等分。

从而 A、P、D、Q 确为圆 O 的四等分点。

如果拿破仑问题不给出圆心，那就难办多了！不过这是一定能够做到的！

公元 1797 年，意大利几何学家马施罗姆指出：任何一个能用直尺和圆规

作出的几何图形，都可以单独用圆规作出。也就是说：“直尺是多余的！”

学过平面几何的读者，可能都已了解，用直尺和圆规的一切作图，归根到底都取决于：

（甲）求两圆交点；

（乙）求一直线与一个圆的交点；

（丙）求两直线交点。

以上三条，（甲）自然可用圆规完成，关键在（乙）、（丙）。为了弄清这一点，我们先介绍几种可单独用圆规作出的基础作图：

【作图 1】试单独使用圆规，作点 X 关于直线 AB 的对称点 X'。

作法：见图自明。（左图）

【作图 2】在圆心 O 已知的情况下，试单独使用圆规，求圆 O 的弧 AB 的中点 M。

作法：如图，不难单独使用圆规作 ABOC 及 ABDO。

令 OA＝r，AB=m。则在 ABOC 中

$\because CB^2+OA^2=2(AB^2+OB^2)$

$\therefore CB^2+r^2=2(m^2+r^2)$

$CB^2=2m^2+r^2$

现作圆 C（CB）交圈 D（DA）于 E 点，则

$\because OE^2=CE^2-OC^2=CB^2-OC^2$

$\therefore OE^2=2m^2+r^2-m^2=m^2+r^2$

再作圆 C（OE）交圆 D（OE）于 F 点

$\because OF^2=CF^2-OC^2=OE^2-OC^2$

$\therefore OF^2=m^2+r^2-m^2=r^2$

从而，F 为圆 O 上的点。又根据图形的对称性知，F 即为 AB 的中点。

【作图 3】试单独使用圆规，求线段 a，b，c 的第四比例项 x。

作法：我们试作其中最为普遍的一种情况，其余留给读者。

取定一点 O 作圆 O（a）、圆 O（b）。在圆 O（a）上任取一点 M，并求得另一点 N，使弦 MN＝c。任选一半径 r，作圆 M（r）和 N（r）分别交圆 O（b）于 P、Q 点，并使 OP 与 OQ 中恰有一条位于＜MON 内部。易知

△OMN∽△OPQ

从而 OM：OP＝MN：PQ

即 a：b＝c：x

也就是说，弦 PQ 即为所求的第四比例项 x。

由此可见，单用圆规求一直线与圆的交点，现在已经没有太大困难了。

如上图，利用基础作图 1，作已知圆 O（r）的圆心 O 关于直线 AB 的对称点 O'。则圆 O（r）与圆 O'（r）的交点 P、Q 即为所求的直线 AB 与已知圆 O（r）的交点。

不过，有一种情况似乎例外，即直线 AB 恰过 O 点，此时基础作图 1 失去了效用。然而我们可以如同左图再利用基础作图 2，求出 MN 的中点 P（和 Q）。不难明白，P、Q 即圆 O 与直线 AB 的交点。也就是说，我们已经解决了关键作图（乙）。

再看看关键作图（丙），即如何单用圆规求两直线的交点。实际上，我们可以把它归结为基础作图 3。

如图，我们先按基础作图 1 作 C、D 关于直线 AB 的对称点 C'、D'；然

后，再确定点 E，使 CC'D'E 为平行四边形，这是单独用圆规能够做到的。很明显，D、D'、E 三点共线。

令 CD 与 AB 的交点为 F。我们现在的目的，显然就是需要求出 F 点。

∵ D'F∥EC∴ DE：DD'＝DD'：DF

即 DF=X 为 DE、DD'、DC 的第四比例项，因而也能单独使用圆规作出。接下去的任务是求圆 D（x）和圆 D'（x）的交点 F，这已经是很容易的事了。

至此，我们已经令人信服地证明了马施罗姆关于"直尺是多余的"结论！

最后值得一提的是：大约在公元 1928 年左右，丹麦数学家海姆斯列夫的一个学生，在哥本哈根的一个旧书摊上，偶然发现一本旧书的复制品《欧几里得作图》。该书出版于公元 1672 年，作者是一位名不见经传的人物 G·莫尔。这本书不仅包含了马施罗姆的结果，而且还给出了一种不同的证明，这一事实表明：圆规几何学的历史至少应当向前推移 125 年！

巧用直尺作图

在上一个故事中，我们已经知道：对于可用尺规作图的问题来说，直尺本是多余的！反过来，对于同样的作图问题，圆规是否也是多余的呢？

回答是否定的！只要举一个反例就就足够了！

给出一个没有圆心的圆，你无论如何无法只用直尺找出它的圆心来。不信，读者可以试试！

不过，另一个结论更为引人注目。公元 1833 年，瑞士数学家施泰纳（Steiner，1796～1863）证明了：任何一种能用圆规和直尺完成的几何作图，都能单独用直尺完成，这只需给定一个有圆心的圆就够了！

要证明施泰纳的结论，也与证明上一节马施罗姆的结论类似，需要解决三个问题。当然，这时必须以给定一个有圆心的圆为前提。

（甲）求两直线交点；

（乙）求一已知圆与一直线的交点，这里的已知圆是指给出圆心及圆上的一点。

（丙）求两圆的交点，这里说的两圆，也是指给出了它们的圆心及各自圆上的一个点。

关键自然在于（乙）、（丙）的作图，能否在给定一个有圆心的圆的前提下，单独用直尺实现呢？如果能够的话，施泰纳定理也就证明了！

施泰纳所提供的证法是精妙无比的：

先研究几个在给定一个圆及其圆心前提下，单独使用直尺的基础作图：

【作图 1】已知直线 l 及线外一点 P，试单用直尺作过 P 点且平行于 l 的直线。

作法：令 A、B 为直线 l 上两点，又 AB 的中点 M 已知。那么，如下图左，连 AP，在 AP 上取一点 S；又连 SM、SB、PB，令 PB 交 SM 于 T 点；再连 AT 并延长交 SB 于 Q 点；连 PQ，则 PQ∥l 上面结论的证明，由于不太难，而且是一道极好的几何练习，因此也就留给读者了。

现在假定在直线 l 上不存在已知中点 M 的线段。那么，我们可以如上图右那样，利用已知圆 O，作过 M 点的直径 LN；很明显，圆心 O 即为直径 LN 的中点；再作另一直径 RS，利用 LON 作 RX，SY∥LN 并交直线 l 于 M、Y 两点。易知 M 即为线段 XY 的中点。接下去作过 P 点而平行 l 的直线，读者已经是熟

门熟路的了！

【作图 2】给定已知圆 O，试单用直尺作过 P 点而垂直于已知直线 AB 的直线。

作法：如图，取给定圆的直径 QQ＇；过 Q＇作直线 Q＇R∥AB，并交圆 O 于 R 点；连 QR，显然有 QR⊥Q＇R。

现在过 P 作 PC∥QR，则 PC⊥AB 即为所求的垂线。

下面我们回到关键作图（乙）

和（丙）上来，为了节省篇幅，我们只证明作图（乙）是可以实现的，而把作图（丙）的证明省略了。

事实上，设已知直线为 g，已知圆给出了圆心 I 和圆上的一点 A。显然，我们可以通过基础作图 1 找到圆 I 上 A 的径对点 B；然后再通过基础作图 2 找出圆 I 上的其它三个点 C、D、E。这样，我们已经有了圆 I 上的五个点 A、B、C、D、E，根据前面的知识，我们知道：单用直尺是完全可以求出直线 g 与圆 I 的交点 P、Q 的！

前面我们说过：对于施泰纳圆来说，给定圆心是至关重要的。可能有的读者依然对此抱有怀疑，甚至认为：多试试说不定就能找到巧妙的方法。其实，这样的方法是根本不存在的！这不是猜测，而是科学！

事实上，如果的确存在用直尺求圆心的方法，而且平面 P 上一系列的线条，给出了由圆 K 求圆心 I 的步骤。那么此时我们可以在空间任取一点 O，以 O 为中心把平面 P 上的所有线条,投影到另一个平面 Q 上来(Q 不平行于 P)。使得圆 K 在平面 Q 上的投影依然是一个圆 K_1（我们有切切实实的办法，选取平面 Q 以保证做到这一点），而其他直线图形则逐个投射为平面 Q 上的直线图形。然而，从下图明显看出，圆 K 的中心 I 的投影点 M，绝不可能再成为圆 K＇的中心，否则便有 OM∥OA 或 OB，这显然是荒谬的！

以上结论表明：如果在平面 P 上，单用直尺通过某种画法步骤得到了某圆的圆心，那么，用同样的画法步骤在另一个平面 Q 上得到的，却不是相应圆的圆心。因而，这样的作图方法，其本身是毫无意义的！

现在读者大概已经相信：在尺规作图中，虽然直尺是多余的，但圆规却不能随意去掉。因此单用直尺作图，有时需要很高的智慧，采用“巧”的办法。

从巧取银环谈起

在新疆一个关于阿凡提巧取银环的故事，几乎家喻户晓。

一天，财主对雇工说：“我有一串银链，共有七个环，你给我做一周的工，我每天付给你一个银环，你愿意吗？”

雇工半信半疑。然后，财主接着又说：“不过，有一个条件，这串银链是一环扣一环的，你最多只能断开其中的一个环。如果你无法做到每天取走一个环，那么你将得不到这一周的工钱！”

雇工感到事情有点为难，于是连忙去找阿凡提。阿凡提想出了一种巧妙的办法，让财主眼睁睁看着雇工把一只只银环取走。

我想聪明的读者一定能想到阿凡提的办法：即把这串银链的第三个环断开，使它分离为三个部分，这三个部分的环数分别是：

这样，雇工第一天可以取走单环，第二天退回单环而取走双环，第三天

再取走一个单环，第四天退回单环和双环而取走一串四环，第五天再取走那个单环。第六天退回单环而取走双环，第七天再取走 1 个单环。这样银链上的所有七个环都已到了雇工手上。

对于上述问题更为深刻的思考是：在允许割断 m 个环的条件下，最多能处理多长的链条（环数为 n），才能做到在 n 天中，每天恰能支付一个环作为工钱？

为了找出 m 与 n 之间的关系，我们先考虑断开两个环，即 m＝2 的情形。显然，此时环链断成了 5 个部分，其中有两部分是单环，可以支付头两天工钱。为了付第三天工钱，必须用一串三环去换回两个单环。以上三部分环可够支付头五天的工钱，因此第四部分应当是 6 环，同理推出第五部分应当是 12 环，即这五个部分的环数分别是：

1，1，3，6，12。

由此得：当 m＝2 时，n=1＋1＋3＋6＋12＝23。类似地，当 m＝3 时，可求得环链割断成七部分的环数如下：

1，1，1，4，8，16，32。

从而 $n=3+4(2^4-1)=4\cdot 2^4-1=63$。

同理，当允许环链割断 m 个环时，环链被断成的 2m＋1 个部分的环数

于是 $n=m+(m+1)(2^{m+1}-1)=(m+1)2^{m+1}-1$

这便是断链问题的一般性解答。

现在我们再看一看有关平面剖分的例子，它无疑要比上面的问题复杂很多。公元 1751 年，欧拉曾提出一道有趣的问题：一个平面凸 n 边形，存在多少种用对角线剖分成三角形的办法？

对此，欧拉本人求出了从 D_3 开始的头七个剖分数：

1，2，5，14，42，132，429。

画出了 $D_6=14$ 的各种剖分情形。

公元 1758 年，数学家西格纳找到了 D_n 的一种递推公式式中假令 $D_2=1$）：

$D_n=D_2D_{n-1}+D_3D_{n-2}+D_4D_{n-3}+\cdots+D_{n-1}D_2$

利用西格纳的公式，可以一步一个脚印地依次算出各 D_n（n＝3，4，5，…）的值，只是当 n 很大时计算有点困难罢了！

他猜测这应该是一条真理！后来乌尔班果真用一种非常巧妙的办法证实了它。乌尔班的方法说来也不难，关键在于构造了一个函数 g（x）

$g(x)=D_2x_2+D_3x_3+D_4x_4+\cdots+D_nx_n+\cdots$

并由西格纳的关系式推知 g（x）满足二次方程：

$W_{2-x}W+x3=0$

上式展开后比较得到

对于空间切割的抽象程度，当然有增无减。下面是一道很有意义的空间切割问题，刊于美国的《数学双周刊》（1950．9～10），作者就是前面提到过的那个马丁·加德纳。问题是这样的：

把一个大立方体，切割成 64 块相同的小立方体，用锯锯开九次是容易做到的。不过，如果允许锯前把锯开的各块重新排列的话，那么只需进 6 刀就够了（怎样达到这一点，本身就是一道极好的智力问题）。然而有一点是可以肯定的，进刀数不能再小于 6 了！这是容易说明的：位于中心部分的小立方体没有现成的面，它的六个面都是过了刀的，而显然我们不可能一刀用时

过两个面由此总进刀数绝不应少于 6。

现在马丁的问题是：一般地把一个大立方体分切成 n_3 个相同的小立方体，最少要进刀几次呢？

看起来这个问题似乎很复杂，实际上比平面的欧拉剖分问题更简单。事实上，为了求最少的进刀数，对横截立方体的每条棱，锯开两部分的单位宽度的数量要尽可能地接近对半，然后把锯开的两部分叠合，重复上面的过程，直至锯成各部分都是单位宽度为止。

对三条棱都作类似处理，就会知道；一般分切 n_3 个立方体所需的最少进刀次数，等于由下式所确定 k 值的 3 倍：

$2^k \geq n > 2^k-1$

例如 n＝4，k＝2，3k＝6。这正是前面说过的结论！

关于图形分割的理论，眉目繁多。有时问题虽小，解答却不容易；有时虽然貌似复杂，但一语道破，竟如履平地。这都需要读者悉心思考，才能领略。

不可忽视的思维方法——逆向推理

人们在思考问题的时候，总习惯于从原因去寻找结果，而不习惯于从结果去追寻原因。实际上，有的问题如果从反向进行推理，其答案的获得将十分快捷。

请看源于古罗马的一个智力游戏：

古代有一位国王，他有一个漂亮的女儿，名叫约瑟芬。话说当时公主约瑟芬正值二八妙龄，且又才华出众，美艳绝伦，引得无数青年小伙子倾慕，求婚者更是络绎不绝。不过，这位美貌公主当时已悄悄地爱上了一位英俊的小伙子乔治。

约瑟芬的父亲，是一位具有花岗岩般脑袋的君主。他虽然很爱自己的女儿，但却坚持要通过一种传统的仪式，以确定女儿应该嫁给什么人。

仪式是这样的：先由公主在自己认为合适的求婚者中选出 10 人，然后让 10 名求婚者围着公主站成一圈，接着由公主根据自己的意愿挑选任何一个人作为起点，并按顺时针方向逐个地数到 17（公主的年龄），这第 17 个人必须退出求婚者的圈子，意即被淘汰。然后，又接下去从 1 起再数到 17，这被数为第 17 的人又被淘汰，如此下去，直至只剩下一个人为止，这人就应该是公主的丈夫。

怎样才能使得最后留下的是心爱的乔治呢？约瑟芬为此而苦苦思索着。她拿了 10 枚金币围成一圈，试了又试，终于悟出了道道，如愿以偿了！

原来约瑟芬发现：无论从哪一枚金币开始数，只要是每次把第 17 块金币拿掉，那么最后剩下来的一块，就总是最初开始数的第三块金币。于是，在仪式中她毅然选择了乔治的前两位作为起点，开始计数。

约瑟芬的问题也叫“计子问题”它的基于逆向推理。

逆向推理的实质，是从结果出发，一步步往前追溯原因，因而常常成为一些对策游戏的取胜之道。

“抢一百”是我国民间流传很广的儿童游戏，玩法极为简单：两人从 1 开始轮流报数，每人每次至少报一个数，至多报五个连续的数，最先报到“100”的人获胜。这个游戏先报数的人只要把握契机必然取胜！事实上，要

抢到“100”就必须抢到“94”；要抢到“94”就必须抢到“88”；要抢到“88”就必须抢到“82”；……。这一系列制胜点的第一个为“4”，谁先报到“4”，谁就能最后报到“100”，所以第一个报数的人只要每次抢报制胜点，便能稳操胜券！

另一种二人对策游戏是在围棋上进行的。先走的人可将一枚棋子放在棋盘的最上面一行或最右边一列的，自己认为适当的格子里。接下去两人轮流走动棋子，走动的方式只能向左、向下或向左下三种；有如右图中的黑子只能走入图中的阴影方格，走多少格悉听尊便，但不能不走；谁先把棋子走到左下角便算谁胜。

上述游戏虽然要比“抢一百”复杂许多，但取胜之道是一样的，用的都是逆向推理。左图我们用黑方格标出了所有的制胜点。只要对策的一方一旦占领了某个制胜点，此后总有办法次次占领制胜点，直至最后胜利。至于这些黑方格是怎么找到的，也就留给读者自己去探讨了！

逆向推理是一种重要的思维方法，它用又一种方式沟通了原因和结果之间的联系。

漫话螺线

数学家的墓碑

数学家们生前曾为数学而献身，在他们死后的墓碑上，仍系着与数学的不解之缘。阿基米德、高斯、鲁道夫、伯努利……均以不同形式的碑文，体现了他们对于数学的热爱。

伯努利生于瑞士巴塞尔的数学世家，其祖孙四代人中出现几十位著名数学家。其中雅谷·伯努利（1654—1705）对螺线进行了深刻的研究，死后遵照其遗嘱在他的墓碑上刻有一条对数螺线，旁边还写道：

虽然改变了，我还是和原来一样！

这句幽默的话语，既体现了数学家对螺线的偏爱，也暗示了螺线的某些性质。

螺线

螺线，顾名思义是一种貌似螺壳的曲线。早在两千多年以前，古希腊阿基米德就曾研究过它。17 世纪解析几何的创立者笛卡儿首先给出螺线的解析式，可见图 1。

有趣的是：一些特殊形式的运动所产生的轨迹也是螺线；

一只蚂蚁以均匀的速度，在一个匀速旋转的唱片中心沿半径向外爬行，结果蚂蚁本身就描绘出一条螺线；

四条狗 A、B、C、D 站在一个正方形的四个顶点上，它们以同样的速度开始跑动：A 始终朝着 B，B 始终朝着 C，C 始终朝着 D，D 始终朝着 A，最后它们相会于正方形的中心。这四条狗的路径都是形状一样的螺线。

上面这些螺线都是平面的，螺线还有空间形式，比如：

一个停在圆柱表面 A 处的蜘蛛，要扑食落在圆柱表面 B 处的一只苍蝇，蜘蛛所选择的最佳路径，便是圆柱上的一条螺线；

蝙蝠从高处下飞，却是按另一种空间螺线——锥形螺线

生命的曲线

英国科学家柯克在研究了螺线与某些生命现象的关系后，曾感慨地说：

“ 螺线——生命的曲线。 ”这句话的道理在哪里？

蜗牛或一些螺类的壳，外形呈螺线状；

绵羊的角，蜘蛛的网呈螺线结构；

波萝、松果的鳞片排列；向日葵子在花盘上的排列是螺线方式；

绕在直立枝杆上爬附的蔓生植物（如牵牛、菜豆、藤类），其蔓茎在枝杆上是绕螺线爬生；

植物的叶在茎上排列，也呈螺线状（无疑这对采光和通风来讲，都是最佳的）；

还有，人与动物的内耳耳轮，也有着螺线形状的结构（这从听觉系统传输角度讲是最优形状）；

生物学家还发现：生命基础的蛋白分子链的排列，也呈螺线形……

试想，从这些生命现象中总结一句“ 螺线是生命的曲线 ”的话语，至少不算过分吧！

生活的曲线

螺线有许多有趣的性质：比如螺线上任一点处的切线与该点到螺线中心（极点）的连线夹角为定值。

再如，无论把螺线放大或缩小多少倍，其形状均不改变（正像把角放大或缩小多少倍，角的度数不会改变一样）。这大概正是伯努利墓碑上那句耐人寻味的话语的含义。

你还可以做一个有趣的实验，把一张画有螺线的纸，绕螺线极点旋转，随着旋转方向的不同（顺或逆时针），可以看到螺线似乎在长大或缩小。

螺线也用于生活的各个角落，最常见的螺钉，上面的镗线不正是一条条螺线吗？机械上的螺杆，日常用品的螺扣……均刻有螺线。

就是在航海上也有应用。比如要追逐海上逃跑的敌舰或缉捕偷渡走私船只，有时也要按照螺线路径追逐……

事物的发展规律不也常常以“ 螺线式 ”为比喻吗？

螺线不仅是生命的曲线，它也是生活的曲线！

“ 糊涂 ”的学问

维维是初中一年级的学生，平时虽然粗心，但却爱动脑筋。一天课余，他从杂志上看了一篇要科学安排时间的文章后，便心血来潮，也想计算一下自己一年中，到底有多少天用在学习上。

这样，一年的学习时间为：

12-4-1.5-1-3-2-0.5＝0。

显然，这是个笑话。看着，看着，维维自己也纳闷起来，可问题出在哪里呢？在没有回答上面问题之前，我们首先来介绍一个概念。

集合

集合是现代数学的一个重要概念。它和几何上的点、线、面一样无法确定义，但通常可粗略地用“ 据有某种属性的事物的全体 ”去描述集合概念。比如男人、女人的全体分别可称之为男人集合、女人集合；书架上的所有书可称为书架上书的集合体；在数学中如整数，有理数的全体称为整数集合和有理数集合等等。

研究集合性质、运算等的学科——集合论，是德国数学家康托（1845—

1918）1892 年在研究三角函数收敛问题时首先创立的。从那以后，集合论渗透到了数学的各个分支。它不仅可以简化论述语言，而且许多重要的近代数学分支如实变、泛函、拓扑等都是建立在集合的基础之上。

也许你不会相信，上面那个问题，运用集合论观点会得到令人满意的解释。

如果我们用三个圆分别表示寒暑假、星期日、睡眠时间等集合（见图 1），那你就会发现它们是相交着的。

a＋d 表示寒暑假中的星期日，

c＋d 表示寒暑假中的睡眠时间，

b＋d 表示星期日的睡眠时间，

d 表示寒暑假中的星期日的睡眠时间。

因而在计算它们时，不应单纯地把它们的时间相加（即三个整圆之“和”），而应去掉它们重复的那部分时间（图中的 a、b、c 和 3d 所代表的时间）。不然，就会闹出一年中的学习时间为 0 的笑话了。

如果你有兴趣，不妨根据表中的数据，结合下页图 2，帮助维维计算一下，看他一年中究竟有多少时间用在学习上？

“众里寻它”的学问

1943 年，第二次世界大战正紧张地进行着。

望着门口长长的等待验血的征兵队伍，美军军医道夫曼陷入了沉思。这些小伙子看来都很健康，可是要吸收他们入伍，还必须验血检查一次，以防一种可怕的疾病带入军队中，每个人都要化验一次，这要花多少时间！本来这种病的发病率并不高，比如说只有百分之一吧，为了一个人，就必须把 100 个人的血逐个儿化验一遍，这样做太不值得了，能不能减少化验次数呢？

道夫曼想起那些重复性的化验操作：抽血，投入试剂，观察反应……。如果是阴性，就算通过；如果是阳性，就表明带有病毒。事情就是那么简单。突然，一个念头闪过他的脑子：干嘛不把一群人的血液都放在一起，集体化验一下呢？若是阴性，就一下子全部通过；若是阳性，就分成几群再试。假定 100 个人中只有一个病号，可把他们分为 10 群，每群 10 人。先每群集体化验一次，必有一群应为阳性的，再将这群人的血一个个化验一遍，这样最多只需化验 20 次就够了。他的想法实际运用后，果然大大加快了验血速度。后来，他把这种试验方法称之为“群试”，发表在一个数学杂志上。

再“一分为二”

把验血问题抽象化，我们可以得出这样一种“数学模型”：已知 N 个物体中含有 d 个坏物，如果从中取出一群物体来作试验，结果只有“好”、“坏”两种。结果为好时，说明这群物体都是好的；结果为坏时，说明这群物体中至少包有一个坏物。问怎样才能以最少试验次数，把 d 个坏物全找出来。可以看出，工厂产品检验等许多问题都是属于这一类。所以，群试法用途很广泛。

人们当然也发现，道夫曼并没有彻底利用群试思想，因为他在试第二遍时，还得一个个地去化验。实际上他可以把群试思想贯彻到底。当仅含一个坏物（即 d＝1）时，更有效的方法是“一分为二”法，即每次都把含有坏物的那群物体一分为二，取其中任意一半作为下次被试验的一群物体。还是假

设 100 个物体中含有一个坏物。第一次任取 50 个来试验。若结果为坏，就在这群物体中取出 25 个来再试。若结果为好呢？这表明坏物含在没试过的剩下的 50 个中。因此可把剩下的 50 个这一群一分为二，任取一半 25 个来试。总之第二次只需试验由 25 个物体组成的群了。这样不断边分边试，遇到一群物体的个数为奇数时，就分成大致相等的两半，像 25 个物体就可以分成 12 个一群及 13 个一群，最后，只需试验 7 次就可以了。