学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中小学生课堂故事博览

偶然中的必然

—概率的故事

BOOK

内部资料 非卖品

偶然中的必然
——概率的故事

偶然中的必然

大千世界，所遇到的现象不外乎两类。一类是确定现象，另一类是随机遇而发生的不确定现象。这类不确定现象叫做随机现象。

如在标准大气压下，水加热到 100℃时沸腾，是确定会发生的现象。用石蛋孵出小鸡，是确定不可能发生的现象。而人类家庭的生男育女，适当条件下和种子发芽等等，则是随机现象。

我们生活着的世界，充满着不确定性。人们虽然能够精确地预卜尚未发生的确定现象的必然事件，却难于预卜尚未发生随机现象的随机事件。我们人类就生活在这种随机事件的海洋里。

从表面上看，随机现象的每一次观察结果都是偶然的，但多次观察某个随机现象，立即可以发现：在大量的偶然之中存在着必然的规律。

比如一枚均匀的钱币掷到桌上，出现正面还是反面预先是无法断定的。我们掷的钱币不止一枚，或掷的次数不止一次，那么出现正、反面的情况又将如何呢？下表是历史上几位名人的投掷钱币的试验记录。容易看出，投掷的次数越多，频率越接近于 0.5。为什么有这样的规律呢？第一个科学地提示其中奥秘的，是世界数学史上著名的贝努里家族的雅各·贝努里（Bemoulli，jacob 1654～1705）。从 17 世纪末到 18 世纪，这个家族的三代人，出了 8 位杰出的数学家。雅各是其中最负盛名的一位。他的数学几乎是靠自学成才的。但由于他的才华和造诣，从 33 岁到逝世的 18 年时间里，一直受聘为巴塞尔大学教授。他的名著《推测术》是概率论中的一个丰碑。书中证明了极有意义的大数定律。这个定律说明：当试验次数很大时，事件出现的频率和概率有较大偏差的可能性很小。因此可用频率来代替概率。这个定律使贝努里的姓氏永载史册。

实验人	投掷次数	出现正面	频率（出现次数、投掷次数）
狄摩更	2048	1006	0.5181
布丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	2400	12012	0.5005

大数定律说的是：当试验次数很大时，随机事件 A 出现的频率，稳定地在某个数值 P 附近摆动。这个稳定值 P，叫做随机事件 A 的概率，并记为 P（A）＝P。

频率的稳定性可以从人类生育的统计中得到生动的例证。一般人或许会认为，生男生女的可能性是相等的，因而推测男婴和女婴出生数的比应当是 1：1，可事实并非如此。

公元 1814 年，法国著名的数学家拉普拉斯（Laplace1749～1827）在他的新作《概率的哲学探讨》一书中，记载了以下有趣的统计。他根据伦敦、彼得堡、柏林和全法国的统计资料，得出几乎完全一致的男婴出生数与女婴出生数的比值为 22：21，即在全体出生婴儿中，男婴占 51.2%，女婴占 48.8%。

我国的几次人口普查统计表明，男、女婴出生数的比也是 22：21。

为什么男婴出生率要比女婴出生率高一些呢？这是生物学上的一个有趣课题。

原来人类体细胞中含有 46 段染色体。这 46 段染色体都是成对存在的，分为两套，每套中位置相同的染色体，具有相同的功能，共同控制人体的一种性状。第 23 对染色体是专司性别的，这一对因男女而异：女性这一对都是 X 染色体。男性一条是 X 染色体，一条是 Y 染色体。由于性细胞的染色体都只有单套，所以男性的精子有两种，一种含 X，一种含 Y，而女性的卵子，则全部含 X。生男生女取决于 X 和 Y 两种精子同卵子结合。如果带 Y 染色体的精子同卵子结合，则生男；如果是带 X 染色体的精子同卵子结合，则生女。大概是由于含 X 染色体的精子与含 Y 染色体的精子之间存在某种差异吧！这使得他们进入卵子的机会不尽相同，从而造成男婴和女婴出生率的不相等！

以上事实雄辩地表明：在大量纷坛杂乱的偶然现象背后，隐藏着必然的规律。“ 频率的稳定性 ”就是这种偶然中的一种必然。

布丰的投针试验

公元 1777 年的一天，法国科学家 D·布丰（D·buffon1707～1788）的家里宾客满堂，原来他们是应主人的邀请前来观看一次奇特试验的。

试验开始，但见年已古稀的布丰先生兴致勃勃地拿出一张纸来，纸上预先画好了一条条等距离的平行线。接着他又抓出一大把原先准备好的小针，这些小针的长度都是平行线间距离的一半。然后布丰先生宣布：“请诸位把这些小针一根一根往纸上扔吧！不过，请大家务必把扔下的针是否与纸上的平行线相交告诉我。”

客人们不知布丰先生要干什么，只好客随主意，一个个加入了试验的行列。一把小针扔完了，把它捡起来又扔。而布丰先生本人则不停地在一旁数着、记着，如此这般地忙碌了将近一个钟头。最后，布丰先生高声宣布：“先生们，我这里记录了诸位刚才的投针结果，共投针 2212 次，其中与平行线相交的有 704 次。总数 2212 与相交数 704 的比值为 3.142。”说到这里，布丰先生故意停了停，并对大家报以神秘的一笑，接着有意提高声调说：“先生们，这就是圆周率π的近似值！”

众宾哗然，一时议论纷纷，个个感到莫名其妙；“圆周率π？这可是与圆半点也不沾边的呀！”

布丰先生似乎猜透了大家的心思，得意洋洋地解释道：“诸位，这里用的是概率的原理，如果大家有耐心的话，再增加投针的次数，还能得到π的更精确的近似值。不过，要想弄清其间的道理，只好请大家去看敝人的新作了。”随着布丰先生扬了扬自己手上的一本《或然算术试验》的书。

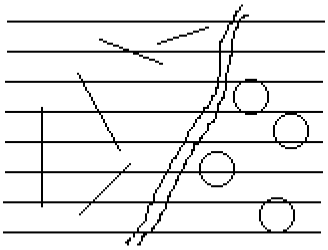
π在这种纷纭杂乱的场合出现，实在是出乎人们的意料，然而它却是千真万确的事实。由于投针试验的问题，是布丰先生最先提出的，所以数学史上就称它为布丰问题。布丰得出的一般结果是：如果纸上两平行线间相距为 d，小针长为 l，投针的次数为 n，所投的针当中与平行线相交的次数是 m，那么当 n 相当大时有：

$$\pi \approx \frac{2ln}{dm}$$

在上面故事中，针长 l 等于平行线距离 d 的一半，所以代入上面公式简化得：$\pi \approx \frac{n}{m}$

我想，喜欢思考的读者，一定想知道布丰先生投针试验的原理，下面就是一个简单而巧妙的证明。

找一根铁丝弯成一个圆圈，使其直径恰恰等于平行线间的距离 d。可以想象得到，对于这样的圆圈来说，不管怎么扔下，都将和平行线有两个交点。因此，如果圆圈扔下的次数为 n 次，那么相交的交点总数必为 2n。



现在设想把圆圈拉直，变成一条长为πd 的铁丝。显然，这样的铁丝扔

下时与平行线相交的情形要比圆圈复杂些，可能有 4 个交点，3 个交点，2 个交点，1 个交点，甚至于都不相交。

由于圆圈和直线的长度同为πd，根据机会均等的原理，当它们投掷次数较多，且相等时，两者与平行线组交点的总数可望是一样的。这就是说，当长为πd 的铁丝扔下 n 次时，与平行线相交的交点总数应大致为 2n。

现在再来讨论铁丝长为 l 的情形。当投掷次数 n 增大的时候，这种铁丝跟平行线相交的交点总数 m 应当与长度 l 成正比，因而有：

$$m=kl$$

式中 K 是比例系数。

为了求出 K 来，只需注意到，对于 l=πd 的特殊情形，有 m=2n。于是求得 $K=\frac{2n}{\pi d}$。代入前式就有

$$m=\frac{2lk}{d\pi}$$

从而 $$\pi\approx\frac{2ln}{dm}$$

这便是著名的布丰公式。

利用布丰公式，还可以设计出求$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$等数的近似值的投针试验呢！亲爱的读者，你不妨一试。

威廉·向克斯的憾事

圆周率π是圆周长与直径的比值。公元前三世纪，古希腊著名学者阿基洣德（Archimada 公元前 287～212 年）计算出π≈3.14。公元 263 年前后，我国魏晋时期的数学家刘徽，利用割圆术计算了圆内接正 3072 边形的面积，求得π≈$\frac{3927}{1250}=3.1416$。又过了约两百年，我国南北朝时期杰出的数学家祖冲之（429～500）确定了π的真值在 3.1415926 与 3.1415927 之间。

祖冲之之后的第一个重大突破，是阿拉伯数学家阿尔·卡西，他计算了圆内接和外切正 3×2^{28}＝805306368 边形的周长后得出：

$$\pi\approx3.1415926535897932$$

公元 1610 年，德国人鲁道夫（1540～1610）把π算到了小数点后 35 位。往后，记录一个接一个地被刷新：1706 年，π的计算越过了百位大关，1842 年达到了 200 位，1854 年突破了 400 位，……

1872 年，英国学者威廉·向克斯（1812～1882）花费了整整二十个年头把π的值算到了小数点后 707 位。向克斯死后，人们纪念他，就在他的墓碑上刻下了他一生心血的结晶：π的 707 位小数。此后半个多世纪，人们对威廉·向克斯的计算结果深信不疑，以至于在 1937 年巴黎博览会发现馆的天井里，依然显赫地刻着向克斯的π值。

又过了若干年，数学家法格逊对向克斯的计算结果产生怀疑，他认为在π

的数值式中，各数码出现的概率都应当等于$\frac{1}{10}$。于是，他统计了威廉·向克斯π的头 608 位小数中，各数码出现的情况：

数码	出现次数	出现频率	与设想频率相差
0	60	0.099	-0.001
1	62	0.102	＋0.002
2	67	0.110	+0.010
3	68	0.112	＋0.012
4	64	0.105	+0.005
5	56	0.092	-0.008
6	62	0.102	+0.002
7	44	0.072	-0.028
8	85	0.095	-0.005
9	67	0.110	+0.010
	608	1.000	

法格逊觉得：向克斯计算的π，数码出现的次数不基本相同，可能是计算有错。于是，他下定决心，用当时最先进的计算工具，从 1944 年 5 月到 1945 年 5 月，整整算了一年，终于发现：向克斯π的 707 位小数中，只有前 527 位是正确的，由于从当初向克斯没有发现，使他白白浪费了许多年的光阴，这真是色。终生的憾事。法格逊的成就，基于他的一个猜想，即在π值的数值式中各数码出现的概率相等。尽管这个猜想曾导致法格逊发现并纠正

了向克斯的错误，然而猜想毕竟不等于事实！法格逊想验证它，却无能为力，人们想验证它，又苦于已知π的位数太少。

但是情况很快有了转机，随着电子计算机的出现和应用，计算π的值有了飞速进展。1961 年，美国学者丹尼尔和伦奇把π算到了小数点后 100265 位，20 年后，日本人又把记录推过了 200000 位大关。于是，人们的心中又重新燃起了验证法格逊猜想的希望之火。1973 年，法国学者让·盖尤与芳旦娜小姐合作，对π的前一百万位小数中各数码出现的频率，进行了有趣的统计，得出以下结果。

数码	出现次数	出现频率
0	99959	0.1000
1	99758	0.0988
2	100026	0.1000
3	100229	0.1002
4	100230	0.1002
5	100359	0.1003
6	99548	0.0995
7	99800	0.0998
8	99885	0.1000
9	100106	0.1001
	1000000	1.0000

从上表看出，尽管各数字出现也有某种起伏，但基本上平分秋色。看来，法格逊的想法应当是正确的！在π的数值展开式中——各数字出现的概率是：

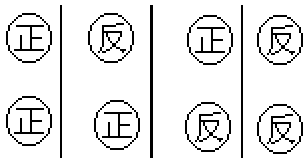
P（0）=P（1）＝P（2）=……＝P（9）＝0.1

等可能性事件的概率

随机事件的概率，一般可以通过大量重复试验求得其近似值。但对于某些随机事件，也可以不通过大量重复试验，而只通过对一试验中可能出现的结果的分析来计算其概率。譬如，投掷一枚均匀的硬币，它要么出现正面，要么出现反面，出现这两种结果的可能性是相等的。因此，可以认为出现正面的概率是$\frac{1}{2}$，出现反面的概率也是$\frac{1}{2}$。这和大量重复试验的结果是一致的。历史上，有人做过成千上万次投掷一枚均匀硬币的试验，下面是他们的试验记录：

实论者	投掷次数 n	出现正面朝上的次数 m	频率 $\frac{m}{n}$
德摩根	2048	1061	0.518
布丰	4040	2048	0.5069
K・皮尔逊	12000	6019	0.5016
K・皮尔逊	2400	12012	0.5005

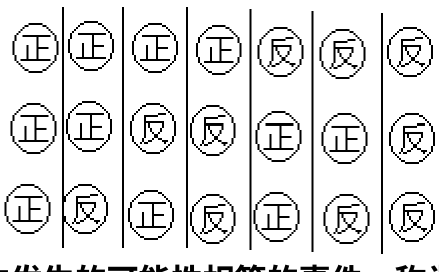
容易看出，投掷次数越多，频率越接近于 0.5。如果投掷两枚均匀的硬币，这两枚硬币落下后，出现四种结果的可能性是相等的，如图：



在这四种可能性相等的结果中，两枚都出现正面的结果只有一种，所以投掷两枚硬币时出现两个正面的概率是$\frac{1}{4}$；同样，两枚都出现反面的概率也是$\frac{1}{4}$。

在这四种可能性相等的结果中，一枚出现正面，一枚出现反面的结果则有 两种，所以投掷两枚硬币时出现一枚正面，一枚反面的概率是$\frac{1}{2}$。

如果我们投掷三枚均匀的硬币，这些硬币落下后，出现以下八种结果的可能性是相等的：



这种在一次试验中发生的可能性相等的事件，称为等可能性事件。

一般地，如果一次试验中共有几种等可能出现的结果，其中事件 A 包含的结果有 M 种，那么事件 A 发生的概率

$$P（A）=\frac{m}{n}$$

例如：袋中有 5 个白球和 3 个黑球，从中任意取出两个球，取出两个球都是白球的概率是多少？

为了区别相同颜色的球，设白球为 A、B、C、D、E，黑球为 P、Q、R，那么从这 8 个球中任取 2 个球的方法有 C^2_8 种。

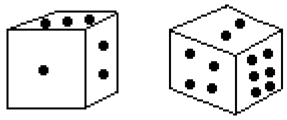
在这些取法中，如（A、B），（A、C）所含的球，虽然都是（白、白），可是它们在球的组合上是不同的，所以取法不相同。这就是说，这 C^2_8 种取法，可以认为任何两种都不是重复的，它们又是等可能的。所以，只需计算出“从中任意取出两个球”这一试验的所有等可能的结果数和“取出的两个球都是白球”这一事件包含的结果数，就可求出：

$$P\{\text{两个球都是白球}\}=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}$$

等可能性原则，在概率计算中是很有用的。

掷骰子引起的争论

一个星期天下午，小聪正在用两个骰子做投掷游戏。小聪是个喜欢动手、动脑的孩子，他想摸索出一套投掷点数的规律。大家知道，骰子是一个六面分别刻有点样的小正方体。两个骰子之和最多可以掷出“12 点”。小聪不断地试验着，扔了一次又一次，并把结果记了下来。他发现，要扔到“12 点”实在是太难了，将近有一半的时候都是扔到和为“6 点”、“7 点”和“8 点”。



这时小明从外面急匆匆走进来，他想邀小聪去打球。小明是小聪的好朋友，平时头脑反应敏捷，喜欢出一些别人总想不到的点子。他看到小聪在不停地掷骰子，不加思索地说：“好啦！明天我做一个大骰子让人慢慢扔，怎么样？还不比你一次用两个小骰子强！”

“一个大骰子？！”小聪一时没弄清小明的意思。

“用正十二面体，各面标上数字 1 到 12 不就得啦！”小明得意洋洋地解释说：

“这样的大骰子替得了两个小骰子吗？”小聪陷入了深思。他总感到小明的主意有点不对劲，但一时又找不出什么理由。

“怎么不行！”小明急忙分辩说，“正十二面体，各面机会均等，每个数字扔到的可能性都是十二分之一。”

小明的话使小聪突然感到眼前一亮，他想到一个很重要的论据。反问道：

“数字‘1’，你的大骰子可以扔出数字‘1’，我的两个小骰子能扔出‘1 点’吗？”

小明语塞，但他很快又组织出新的话题：

“我们不会改做一个正十一面体？各面从数字 2 编到 12！”

“我看过一本书，上面说正多面体只有五种。”小聪挺认真地继续说：“除了正方体和正十二面体以外，另外三种是正四面体、正八面体和正二十面体。根本不可能有你讲的正十一面体！”

小聪的话是对的，看来他的知识面比小明更广一些。

这场关于投掷的有趣争论，自然以小明认输而告终。但小明的输，主要还不在于正十一面体的不存在，而在于两个小骰子扔出的各种点数的机会并不均等。小聪已经从自己的试验中隐隐约约察觉到这一点，只是还没来得及深入探讨下去。这正是我们下面需要继续的工作。

大家知道，掷一个骰子点数的出现有 6 种可能；而掷两个骰子时，由于对第一个骰子有每种点数，都可以搭配第二个骰子的 6 种点数，因此共有 6×6＝36 种的搭配可能。很明显，这 36 种数搭配都是机会均等的，也就是每种搭配的概率都是 $\frac{1}{36}$。但一种点数的出现，往往不止有一种搭配的方式，而可能有“若干”种搭配的方式，因此这种点数出现的概率就应当等于 36 分之“若干”。通过统计各种点数的搭配规律。可以得出，出现和为“6 点”、“7 点”、“8 点”三种点数的概率为

$$P(6)+P(7)+P(8)=\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}=\frac{1}{2}$$

几乎占了一半。而出现“2 点”或“12 点”的概率，各都只有$\frac{1}{36}$，因而是极不容易出现的。这跟小聪在试验中观察到的是一致的。上面的结论意味着：即使存在正十一面体，这场争论小明也是注定要失败的。

有趣的求π的方法

大约在公元 1904 年，R·查理斯（Chartres）做了下面的实验：他让 50 名学生，每人随机写出 5 对正整数，在所得到的 250 对正整数中，他检查了互

素的数目有154对，得到概率$\frac{154}{250}$。而理论上计算两个随机正整数互素的概率为$\frac{6}{\pi^2}$，代入计算得：

$$\pi \approx \sqrt{6 \times \frac{250}{154}} \approx 3.12$$

这实在太出人意料！随机写下的正整数，竟会与圆周率π发生联系。这 50 位学生被震惊了！为什么π竟会在这样的场合出现呢？当你看下面的类似例子之后，将会明白。

这个有趣的例子是：

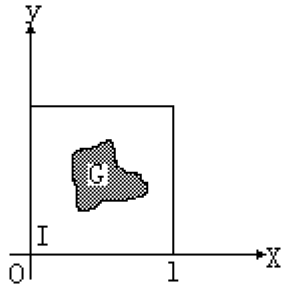
“随机写出两个小于 1 的正数 X 和 Y，它们与数 1 在一起，正好构成一个锐角三角形，三边的概率为$1-\frac{\pi}{4}$”。

问题的结构和前面 R·查理斯的实验极其类似。然而，它的证明却无需动用很多的知识和花费很大的气力。

事实上，由于 x 和 y 都是在 0 与 1 之间随机选取的，所以点（x，y）均匀地分布在单位正方形 I 的内部。如果符合条件的点，落在一个阴影区域 G 上。那么，根据机会均等的原则，所求的概率应为

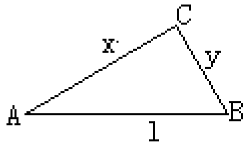
$$P = \frac{G\text{的面积}}{I\text{的面积}}$$

现在假令以 x，y，1 为三边的三角形是△ABC，其中∠C 对应于最大的边 I。为使 x、y、1 能构成任何种类的三角形，注意到 x，y 为小于 1 的正数的限制，知：$x+y>1$



又∠C 为锐角，应用余弦定理可得：

$1^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos C < x^2 + y^2$

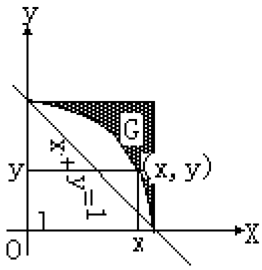


满足上面两式，且在单位正方形 I 内的区域 G。G 的曲边周界，是以原点为中心，I 为半径的四分一圆周。由于 G 的面积

$$S_G = S_1 - 1\frac{1}{4}S\odot = 1 - \frac{\pi}{4}$$

这就证明了所述问题的概率

$$P = \frac{S_G}{S_I} = \frac{1-\frac{\pi}{4}}{1} = 1 - \frac{\pi}{4}$$



看！π确实出乎意料地出现在随机写数的场合中，这是多么神奇！多么超乎想象！

有了上面的结果，读者便可以仿效 R·查里斯去设计你的实验了。设想，你请来许多同学和朋友（人越多越好），或在某次集会之后，宣布由你主持表演“科学魔术”。办法是让大家各自随意写下两个小于 1 的正数。顺便请他们各自检查一下，所写的两数与 1 是否构成一个锐角三角形。作为主角的你，只需将每人报告的“能”或“不能”构成锐角三角形的结论记录下来就行了，倘若有 n 个人说“能”，而有 m 个人说“不能”，那么根据公式$\frac{n}{n+m} \approx 1 - \frac{\pi}{4}$**算得**

$$\pi \approx 4 \times (1 - \frac{n}{n+m}) = \frac{4m}{n+m}$$

你可以当众宣布这一个惊人的结果！表演的出色和成功是可以预料的。

利用“等可能性”巧算概率

通过大量的重复试验，得到频率的稳定值，这无疑是求事件概率的最一般方法。

但是，现实中并非所有情况都是等可能的。像考试得分、电话传呼、打靶中环等不均等的例子，比比皆是，下面也是一个典型的例子。直接观察得：

$2^1=2$　　是以数字 2 为开头的；
$2^2=4$　　是以数字 4 为开头的；
$2^3=8$　　是以数字 8 为开头的；
$2^4=16$　　是以数字 1 为开头的；
$2^5=32$　　是以数字 3 为开头的；
$2^6=64$　　是以数字 6 为开头的；
$2^7=128$　　是以数字 1 为开头的；
$2^8=256$　　是以数字 2 为开头的；
$2^9=512$　　是以数字 5 为开头的；
$2^{10}=1024$　　是以数字 1 为开头的；

如此等等。读者可能猜得到，2 的方次幂中，开头一位数字的出现并不是等可能的。事实上，以 7 为开头的，要到 2^{46} 才出现、；以 9 为开头的，要到 2^{53} 才出现。这样看来，似乎要求出数字 n 作为 2 的整次方幂开头的概率 P（n），除大量试验统计外别无他法。其实不然，我们仍可以通过巧妙地利用“等可能性”来计算。为此，令 $S_k=2^K$（K 为自然数）

则（lg2）·K=lgS_k

由于 lg2 是一个无理数，因此所有 lgS_k 的小数部份均匀分布在 0 到 1 之间，即 lgSk 的对数尾数，在 0～1 出现是等可能的。（这里需要读者仔细思考一下为什么）

注意到 S_k 若以数字 1 为开头，则其对数尾数必在 lg1 与 lg2 之间；……Sk 若以数字 2 为开头，则其对数尾数必在 lg2 与 lg3 之间；……根据机会均等原则，在 2^k 中，各数字开头的概率：

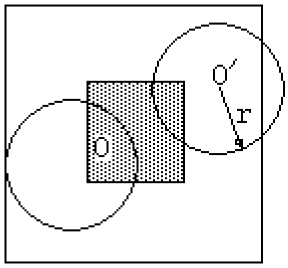
P（1）=lg2-lg1＝0.3010；
P（2）＝lg3-lg2＝0.1761；
P（3）＝lg4-lg3＝0.1249；
P（4）＝lg5-lg4＝0.0969；
P（5）＝lg6-lg5＝0.0792；
P（9）＝lg10-lg9＝0.0458。
……　　……　　……

现实统计 2 的前 332 次幂，得出以下试验结果：

2 开头数字	出现次数	出现频率	理论推算
1	99	29.8％	30.1％
2	60	18.1％	17.6％
3	40	12.1％	12.5％
4	33	9.9％	9.7％
5	27	8.1％	7.9％
6	23	6.9％	6.7％
7	17	5.1％	5.8％
8	19	5.7％	5.1％
9	14	4.2％	4.6％
	332		100％

可以看到，理论计算与试验结论是相当吻合的。

以上例子表明，用机会均等原则计算概率，关键要用得巧，用得活。平面的情形也类似。常见到一些小朋友玩投币游戏：在地上画一个能容四枚硬币的方框。参加者取一枚硬币，在距方框 30㎝ 高处瞄准方框投下。若硬币落入框中，则得 2 分；若压框边或落框外，则得-1 分。每人投 20 次，总计得正分者胜。



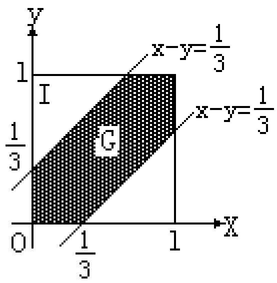
严格地说，游戏中瞄准方框投的硬币落在平面上各点的可能性是不均等的。但由于投币点较远，且方框不大，所以投的币落在方框周围，可以近似地认为是等可能性的。由于要使硬币落入框内，必须使币心 0 落在上图阴影小正方形内，因而硬币落入框内的概率为：

$$P=\frac{\text{阴影正方形面积}}{\text{大正方形面积}}$$

$$=\frac{(2r)^2}{(4r)^2}=\frac{1}{4}$$

所以，尽管落入框内一次得 2 分，但得负分的机会几乎要大 3 倍，因此这个游戏取胜的希望是很少的。

利用机会均等原理，巧妙地计算概率的最为简单和动人的例子，莫过于以下的相遇问题：两人相约在 0 时到 1 时之间相遇，早到者应等迟到者 20 分钟方可离去。如果两人出发是各自独立，且在 0 时到 1 时之间的任何时刻是等概率的，问两人相遇的可能性为几？



为简便起见，假定两人分别在 X 时与 Y 时到达，依题意必须满足：$|X-Y| \le \frac{1}{3}$ 才能相遇。

显然，两人到达时间的全部可能性，均匀地分布在上图的一个单位正方形 I 内。而相遇现象，则发生在上图的阴影区 G 中，根据机会均等原则得两人相遇的概率：

$$P=\frac{S_G}{S_I}$$

$$=\frac{1-(\frac{2}{3})^2}{1^2}$$

$$=\frac{5}{9}$$

这就是说，相遇的可能性过半。

上面只是几个利用机会均等巧算概率的例子，读者可以自行设计一些问题或游戏，用以训练自己的思维和计算。

三个臭皮匠胜似一个诸葛亮

常言道："三个臭皮匠胜似一个诸葛亮。"今天我们就用概率的理论，定量地对它进行证明。

首先介绍两事件的独立性概念：如果一个事件发生与否对另一个事件的发生的概率没有影响，我们就说这两个事件是互相独立的。例如甲气象台和乙气象台预报天气，这两件事，便是独立的；又如，某地患肺炎病与患砂眼病，这两件事是互相独立的；再如，两次射击，第一次击中目标与第二次击中目标，也是互相独立的。假定我们用 AB 表示事件 A 与事件 B 同时发生，那么，当事件 A 与 B 互相独立时，我们有：

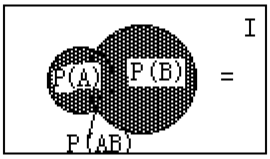
$$P(AB)=P(A)\cdot P(A)$$

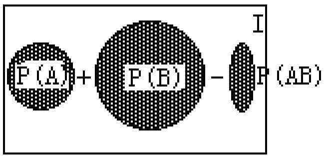
对于三个以上的两两独立事件，类似地我们有：

$$P(AB\cdots C)=P(A)\cdot P(B)\cdots\cdots P(C)$$

现在回到三个"臭皮匠"的问题。假定"臭皮匠"A 独立解决问题的概率为 P（A）；"臭皮匠"B 独立解决问题的概率为 P（B）；"臭皮匠"C 独立解决问题的概率为 P（C）。

如若"臭皮匠"只有两个，那么某一问题能被两者之一解决的可能性有多大呢？





让我们仍从图形的分析开始吧！为方便起见，右图中我们用阴影区域的面积，表示相应事件的概率，如图所标。那么，从上下两图我们立即看到：

$$P(A\text{或}B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

因为"臭皮匠"们思考问题时是彼此独立的。这样，我们又有：

$$P(A\text{或}B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$$

类似地便能够得到一个问题被三个"臭皮匠"之一解决的概率的计算式：

$$\begin{aligned}P(A\text{或}B\text{或}C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)\\&-P(B)P(C)-P(C)P(A)+P(A)\\&P(B)P(C)\end{aligned}$$

例如：$P(A)=0.45$，$P(B)=0.55$，$P(C)=0.60$，即三人的解题把握都大致只有一半，但当他们总体解题时，能被三人之一解出的可能为：

$$\begin{aligned}P(A\text{或}B\text{或}C)&=0.45+0.55+0.60-0.45\times0.55\\&\quad-0.55\times0.60\times0.45\\&\quad+0.45\times0.55\times0.60\\&=0.901\end{aligned}$$

看！三个并不聪明的"臭皮匠"居然能够解出百分之九十以上的问题，聪明的"诸葛亮"也不过如此！

上面我们是从“臭皮匠”们解决问题的角度来分析的。如果我们换另一个角度来分析，所得的结果将更简捷、更精辟。事实上，如果一事件出现的概率为 P，那么该事件不出现的概率必定为（1-P）。这样，三个“臭皮匠”同时不能解决问题的概率为[1-P（A）][1-P（B）][1-P（C）]。把全部可能的 1，减去同时不能解决的可能性，当然就得到三者至少有一人解决的可能性，即：P（A 或 B 或 C）＝1-[1-P（A）][1-P（B）][1-P（C）]上式展开的结果跟前面的公式是一样的，但保留上面算式在计算上要简单得多。如上例：

P（A 或 B 或 C） ＝1-（0.45）·（1-0.55）·（1-0.60）

＝1-0.55×0.45×0.40

＝0.901

又当“臭皮匠”人数增多时，前一种算法将不胜其繁，而后一种算法无须什么变动依然适用。

例如，十个刚参加军训的学生，每人打靶的命中率都只有 0.3，这样的命中率应该说是低的了。但如若他们朝同一个目标射击，那么据上面的式子，目标被击中的概率为：

$$P=1-(0.70)^{10}\approx 0.97$$

也就是说，目标是几乎会被击中的。可见人多不仅智慧高，而且力量也大。“三个臭皮匠胜似一个诸葛亮”所言实不过份。

赌金风波

公元 1494 年，意大利出版了一本有关计算技术的教科书，作者帕奇欧里（Paciuolo）提出了以下问题，假如在一场比赛中胜六局才算赢，那么，两个赌徒在一个胜五局，另一个胜两局的情况下中断赌博，赌金该怎样分？帕奇欧里本人的看法是，应按照 5 与 2 的比，把赌金分给他们两人才算合理。

后人对帕奇欧里的分配原则表示怀疑，觉得有些不合适。他们举例说：如果一场比赛需要胜 16 局才算赢的话，那么，当两个赌徒中一个已胜 15 局，另一个才胜 12 局的情况下，赌博被迫中断，该怎么分赌金呢？这时场上的形势是：已经胜 15 局的赌徒，胜券在握，只要再胜一局，就可得到全部赌金。而另一名赌徒却需要连胜 4 局才行。可是按帕奇欧里的分配原则，他们两人所分的赌金应当是 15：12＝5：4，显然这种分配原则是不够公平合理的。然而，当时没有人找到更加合适的办法。

半个世纪以后，曾以发表三次方程的求解公式而闻名于世的意大利数学家卡当（Cardano）讨论了一个类似的问题。他发现：需要分析的不是已经赌过的次数，而是剩下的次数。他想，在帕奇欧里的问题里，胜了五局的赌徒只要再赢一局，便可以结束整场的赌博。所以假若比赛不中断的话，再赌下去只有五种可能，即他第一局胜，第二局胜，第三局胜，第四局胜或者所有四局都输掉。卡当认为，总赌金应按照

（1＋2＋3＋4）：1＝10：1 的比例来分配。实际上，上面的结果是错的，后面我们将会看到正确答案是 15：1。

公元 1651 年夏天，当时盛誉欧洲号称“神童”的数学家巴斯卡，在旅途中偶然遇到了赌徒梅累，梅累是一个贵族公子哥儿，他对巴斯卡（B.Pascal，1623～1662）大谈“赌经”，以消磨旅途时光。梅累还向巴斯卡请教一个亲身所遇的“分赌金”问题。

问题是这样的：一次梅累和赌友掷骰子，各押赌注 32 个金币，梅累若先掷出三次“6 点”，或赌友先掷出三次“4 点”，就算赢了对方。赌博进行了一段时间，梅累已掷出了两次“6 点”，赌友也掷出了一次“4 点”。这时，梅累奉命要立即去晋见国王，赌博只好中断。那么两人应该怎么分这 64 个金币的赌金呢？

赌友说，梅累要再掷一次“6 点”才算赢，而他自己若能掷出两次“4 点”也就赢了。这样，自己所得应该是梅累的一半，即得 64 个金币的三分之一，而梅累得三分之二。梅累争辩说，即使下一次赌友掷出了“4 点”，两人也是秋色平分，各自收回 32 个金币，何况那一次自已还有一半的可能得 16 个金币呢？所以他主张自己应得全部赌金的四分之三，赌友只能得四分之一。

公说公有理，婆说婆有理。梅累的问题居然把巴斯卡给难住了。他为此苦苦想了三年，终于在 1654 年悟出了一点道理。于是他把自己的想法写信告诉他的好友，当时号称数坛“怪杰”的费尔马（Fermat，1601～1665），两人对此展开热烈的讨论。后来荷兰数学家惠更斯（C.Huygens，1629～1695）也加入了他们的探讨行列。最后，他们一致认为，梅累的分法是对的！惠更斯还把他们讨论的结果，载入 1657 年出版的一本叫《论赌博中的计算》的书中。这本书至今被公认为概率论的第一部著述。

梅累的分法为什么是对的？巴斯卡和费尔马他们又是怎么想的？这一连

串的疑团要等今后大家学到更多概率论知识的时候，才能一一解开。

事实上，按卡当的想法，在中断赌博之后所设想的 4 局比赛中，每局都有胜负两种可能，总共有 2×2×2×2＝16 种可能。其中只有最后一种，即第一个赌徒四局全负时，第二个赌徒才可能得到赢。而其余 15 种情况都是输。因此，他们的赌金分配比例应当是 15：1。

赌金风波终于以概率论的诞生命宣告平息。

生日相同的五同胞

这是一个真实的故事，故事发生在美国的弗吉尼亚州，男主人公名叫拉尔夫，女主人公叫卡罗琳。他们的五个孩子虽然年龄各不相同，但都在 2 月 20 日出生。

奇迹般故事的序幕是在 1952 年 2 月 20 日拉开的。预计在 3 月份出生的长女卡莎琳，硬是提前两个星期来到了人世间。一年之后的同一天，次女卡罗尔又诞生了。拉尔夫夫妇对这种巧合惊讶不已，况且 1952 年是阳历闰年，这一年比通常的 365 天要多上一天。

1954 年 6 月，母亲卡罗琳第三次怀孕。由于头两个孩子都在 2 月 20 日出生，因此做父母的也曾抱着一线希望，期待即将出世的宝宝，能够跟两位姐姐的生日巧合。为此他们曾向医生请求："如果到了 2 月 20 日还不见孩子出生的话，就请用催产的办法。"然而，到了这一天卡罗琳自然分娩了。准时来到人间的是宝贝儿子查尔斯。

此后隔了五年。到了 1959 年，三女儿克罗蒂娅鬼使神差般也在 2 月 20 日降世。生她时，家中正在为三个孩子庆贺生日。母亲分娩后不顾生育劳累，匆匆赶回家中，决意亲手为孩子们烤糕点。

四个孩子神奇般地出生在一年 365 天里的同一天，一时在当地传为佳话。因此，当卡罗琳第五次怀孕的消息传开。整个弗吉尼亚地区群情雀跃，人人兴奋不已，个个翘首以待。2 月 20 日这一天，父亲拉尔夫正在运动场观看足球赛。比赛紧张激烈，场上角逐正酣。突然扩音器里传来了振奋人心的消息："拉尔夫，祝贺您！生了个女儿。"顿时，整个运动场沸腾起来，运动员们也暂停比赛，加入欢呼行列。人们组成浩浩荡荡的队伍，把拉尔夫像英雄般地抬了起来，……。

五同胞相同生日的故事到此结束了，值得我们思考的是：同一父母所生的五个子女，生日全都相同的概率到底有多大呢？请看下表：

称呼	姓名	（2 月 20 日）出生的概率
长女	卡莎琳	$P_1=1$
次女	卡罗尔	$P_2=\frac{1}{365}$
儿子	查尔斯	$P_3=\frac{1}{365}$
三女	克罗蒂娅	$P_4=\frac{1}{365}$
小女	赛茜莉娅	$P_5=\frac{1}{365}$

长女卡莎琳的生日是随机的。对于她，生日的选择是不受约束的，因而 $P_1=1$。对于次女卡罗尔，情况则有所不同。她要与她姐姐生日相同，就只能在

全年 365 天中特定的一天出生，因而 $P_2=\frac{1}{365}$。同理可得查尔斯、克罗蒂娅、

赛茜莉娅等人在2月20日出生的概率，各自均为$\frac{1}{365}$。

由于以上五姊妹降临人世是彼此独立，并且是同时出现的，因此其出现的总的概率应为

$$P=P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5$$

$$=1\cdot\left(\frac{1}{365}\right)^4$$

$$=\frac{1}{1.77}\times 10^{10}$$

也就是说，这种现象出现的概率只有一百七十七亿分之一。事实上现今生存在我们这个星球上的人，充其量不过五十亿。而其中有生育能力，而且恰好生五个孩子的女人，估计不会超过一亿（10^8）。这样，在我们整整一代人中，出现这种现象的可能性只有：

$$P\times 10^8=\frac{1}{1.77}\times 10^{10}\times 10^8=0.56\%$$

这意味着即使经历了十代人，也极难出现一次五同胞生日相同的事件。况且“可能”还不等于“一定”要出现呢！然而，这种千载难逢的现象，居然真真切切地有幸发生在我们的时代，这是多么稀奇、多么难得的事！

揭开抽签顺序的谜

班级决定举行香港知识竞赛，各小组派一名代表参加。要求赛前由各小组用抽签的方式，随机决定参赛人选。

放学路上，小聪、小明和小花三个同组的同学走在一起，议论下午竞赛的事。小明对小聪说：

“你比我们准备得都要充分，下午抽签你就先抽吧！”

“这跟抽签先后有什么关系？”

“！怎么没关系！先抽的人当然要比后抽的人抽到的机会要大。”

“这也不一定”在一旁听他们争论的小花冷不防插了一句。

“怎么会不一定！”小明急忙辩解，“第一人抽的时候，做记号的签纸还在，假如这张纸被第一个人抽去了，那后面的人就根本不用抽了。”

小明一边对小花说着，一边目光频频朝小聪看，似乎在寻找支持者。不料小花不甘示弱，语出惊人，说出了一番颇有份量的话：

“我看后抽的人抽到的可能性更大。比如我们组有十个人，做记号的签条

只有一张，因此第一个人抽到的可能性是十分之一。由于 $\frac{1}{10}$ 的概率是很小的，所以第一个人一般是难于抽到的。但对第二个人来说，这时只剩下九张签纸，其中包含了一张做有记号的，因此他抽到这张签纸的可能性是九分之一。这比第一个人抽到的十分之一可能性要大些。如果前九个人都没有抽到的话，那么最后一个人抽到有记号的签纸就是必然的了，这时抽到的概率还等于 1 呢！可不是！”

小明语塞，一时想不出更有力的论据，只是怀疑地反问：

“你说的都是别人抽不到有记号的签，如果别人抽到了呢？”

这时，刚才一直在思考的小聪，猛地杀出一种观点：“我看所有人抽到有记号的签的机会是一样的！”

“怎么？一样？”小明和小花异口同声地惊呼！这的确有点使人难以置信。小明一向佩服小聪，知道他没有相当把握是不会轻易作结论的，但这时也不禁满腹狐疑：

“要知道第一个人抽时有十张签纸，而最后一个人抽时只有一张签纸，事实上他抽不抽都无所谓，因为实际已经决定了的，他们抽到有记号的签的机会能一样吗？”

“是的，我是这样认为的。”小聪不觉加重了语气。接着他问小明和小花，“全组有十个人，一个接一个地抽，抽到什么签假定大家暂时都不看，或者即使看了，也暂时不声张，那么每个人拿到有记号签的可以性有多大呢？”

“十分之一！”两人齐声回答，似乎有点不以为然。

“现在大家再去看自己抽的是什么签，这与抽签顺序及抽到签的内容会有影响吗？”小聪又一个问。

“当然没影响！”小明和小花又一次齐声答。

“那这不是说他们抽到有记号签的可能性都是十分之一吗？”小聪胸有成竹。

“？！”

真是绝妙的解析！小明和小花似乎被小聪的智慧所折服。虽说如此，在他们的心里还是有点嘀咕：“抽签的人都是一抽到就看签纸的呀！”他们老感到这个前提有点蹊跷。但小聪本人也无法说出一个所以然，他们决定第二天把这个关于抽签顺序的“谜”请教老师。

老师没有直接回答“谜底”，而是拿了一些围棋子，放入小布袋中，问大家：“假定袋里有 m 个白子和 n 个黑子，那么第一次摸到白子的可能性有多少呢？”

“$\frac{m}{m+n}$”大家答。

问：“摸到黑子呢？”

答：“$\frac{n}{m+n}$”

“对！”老师肯定说，“现在假定这个已经摸出的棋子不放回去，那么袋里一共还有几个棋子？”

“有（m＋n-1）个。”三人异口同声回答。

“如果这时大家从袋子里抽出一个白子的可能性是多少呢？”老师继续问。

三人全都陷入了沉思。到底是小聪反应快些，他说：“老师，我们还不知道第一次抽的是白子还是黑子呢？”

“很好！”老师赞许地点点头”，“第一次可能抽到白子，也可能抽到黑子。”

“那么两种情况都要考虑，对吗？”三人似有所悟。

“对极了，同学们，现在请你们拿张纸算一算吧！”

于是三个朋友围在小桌旁，边讨论边计算。纸上的算式清晰地描绘了以下的思路：

第一次如果摸到白子，那么这时袋子里剩下 m-1 个白子和n个黑子。此时去摸，又得白子的可能性为$\frac{m-1}{m+n-1}$。

第一次如果摸到黑子，那么这时袋子里剩下 m 白子和 n-1 个黑子。此时去摸，也得白子的可能性为$\frac{m}{m+n-1}$。

注意到第一次摸到白子的可能性为$\frac{m}{m+n}$，摸到黑子的可能性$\frac{n}{m+n}$，因此第二次摸到白子的总可能性是：

$$P=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{m-1}{m+n-1}+\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n-1}$$
$$=\frac{m}{m+n}$$

“老师，第二次摸到白子的可能性也是$\frac{m}{m+n}$”三人为所得结论兴奋不已。

“那么第三次、第四次摸到白子的可能性呢？”老师再问。

“每次摸到白子的可能性跟前一次是一样的，都应该等于$\frac{m}{m+n}$”小聪推理地说，小明和小花也投以赞同的目光。

“太好了，同学们，我想你们已经能够自己得出抽签之‘谜’的谜底了！”

贝特兰的概率悖论

在日常生活中有许多事情，如果你细细思量一番，就会觉得其间有些自相矛盾。

比如，一个村子里只有一位理发师，这位理发师只给本村不替自己理发的人理发。这是长年延袭下来的，不可违背的村规。现在问：这位理发师的头由谁来理？

无论怎样的答案，都将出现矛盾。倘若理发师的头发是“由别人理”的，那么按村规他的头必须由理发师来理，但村里的理发师只有一个，这就变成理发师自己理自己的头，这与原先假定的理发师头“由别人理”自相矛盾。又若理发师的头由“自己来理”，那么按村规：由自己理发的人，理发师是不该给他理的。然而“他”的头，恰恰就是理发师理的，又矛盾。

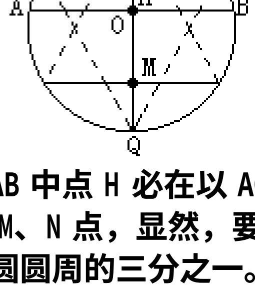
上例在数学上称为“悖论”，意思是自相矛盾的奇谈怪论。一门学科出现悖论，表明该学科的基础还不够严谨。十九世纪末，集合论已成为近代数学的基本工具之一，但究竟什么是集合，连它的创始人，德国著名数学家康托（Cantor，1845～1918）教授，也没有能完全讲清楚。1902 年，英国数学家罗素（Bretrand Russell 1872～1970）提出了一个类似于前面例子的集合悖论，使人对严谨的集合论产生怀疑，从而给整个数学界以极大的震动。此后多年，许多著名的学者绞尽脑汁，试图医治这个怪症，终于使集合论的基础研究取得了重大的突破。

集合论是如此，概率论也是如此，到十九世纪末，概率论虽说已经头角峥嵘，但由于缺乏严格的理论基础，常常被人找到一些可钻的空子。其中最为典型的要算 1889 年法国数学家贝特兰（1822～1900）提出的概率悖论：在圆内任作一弦，其长度超过圆内接等边三角形边长 a 的概率是多少？

[答1]：$P=\frac{1}{2}$

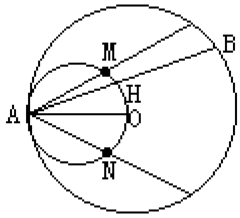
因为设 PQ 为直径。以 P、Q 为顶点作圆内接等边三角形，分别交 PQ 于 M、N 点。在 PQ 上任取一点 H，过 H 作弦 AB⊥PQ，由 H 必为 AB 中点。显然，要使 AB 长大于 a，必须使 H 落于 MN 之中，易知 MN 的长为 PQ 的一半。

[答2]：$P=\frac{1}{3}$

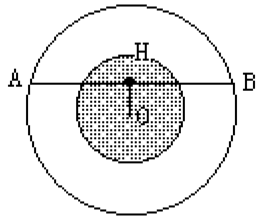


因为设 AB 为任意弦，由 AB 中点 H 必在以 AO 为直径的小圆周上。过 A 作圆内接等边三角形交小圆于 M、N 点，显然，要使 AB 长大于 a，必须使 H 落于 MN 上。易知 MN 的长为小圆圆周的三分之一。

[答3]：$P=\frac{1}{4}$



因为设 AB 为任意弦，H 为中点。显然，要使 AB 长大于 a，必须使 OH 小于 $\frac{a}{2}$。即在半径为大圆一半的小圆内。易知这样小圆的面积只有大圆面积的四分之一。



以上三种解答似乎都有道理，那么究竟谁是谁非呢？仔细推敲琢磨，就会发现：三种解答的前提各不相同。第一种解答是假定弦中点 H 在直径 PQ 上均匀分布的；第二种解答是假定弦中点 H 在小圆周上均匀分布的；而第三种解答是假定弦中点 H 在圆内均匀分布的。由于前提条件各个不同，所以得出的答案自然各异。实际上，如果我们高兴的话，还可以设置新的前提，使贝特兰问题的概率等于任何预先给定的数。

$$P\left\{\frac{1}{3} \le P \le \frac{1}{2}\right\}$$

为了堵塞诸如“贝特兰悖论”那样的漏洞，科学家们发动了一场对概率基础理论的“攻关”战。这一坚固的科学堡垒，终于在 1933 年为苏联数学家柯尔莫哥夫等人所攻克！

蒙特卡洛方法

选优，是人类赋予科学的永恒课题。对同一个问题来说，选优的方法一般是很多的。从众多的选优方法中，找出最优的方法，这就是优选法。下面一个流传很广的智力测验题，可以生动地说明优选法的实质。

有 12 个球，外表全然一样，已知其中有一个球重量异于其他，但不知其较轻或较重。试用无砝码天平称量比较，找出这个“伪球”，并指出它较轻或较重于“真球”。

如果不限制称量比较的次数，那么要找到伪球是轻而易举的。但是，假如限定你只能用无砝码天平称量 3 次，你一定会感到不那么容易！可以证明，在我们的问题中，通过 3 次称量，能够处理的最多球数是 12 个。一般地，用无砝码天平称量 n 次，能够处理的最多球数如下表。见图 1，像这样，用最少的比较次数，去处理最多球数的方法，就是优选法需要研究的。

上面的问题中有一个前提，即在众多的球中只有一个是伪球。如果伪球不止一个，而是若干个。即所有需要判定的球分为两类：一类叫“真球”，一类叫“伪球”，它们外表都相同，只是重量略有差异。其实，“真”、“伪”只是一种称呼而已，所以为方便起见，今后我们总把伪球看成比真球略重些。多个伪球的问题，显然要比单一伪球的问题更为复杂。比如有 20 个这样的球，那么光是判定伪球的数目，你就非得用无砝码天平称量十一次以上不可！

称量次数	最多可处理的球数
1	0
2	3
4	39
5	120
6	363
7	1092
…	…
n	$\frac{1}{2}(3^n-3)$

现在再进一步假设：球的数量极多，而且重量各不相同。这时问题显然大为复杂。蒙特卡洛方法就是告诉我们，怎样从大量的球中，去寻找较重或较轻球的办法。设想所有的球人为地分为两类，一类是较轻的真球，一类是较重的伪球。蒙特卡洛方法说，只要从所有的球中，随机选取 r 个球，则其中最重的球，基本上是伪球。

上述方法，似乎令人难以置信，然而事实确实如此！实际上，我们可以把随机抽取的 r 个球，看成是相继抽取的。由于假设的数量很多，所以为了简化计算不妨认定每次取出球后又放回。这样，如若假定真球有 m 个，伪球有 n 个，那么每次抽到真球的概率均为 $\frac{m}{m+n}$。

r 次都抽到真球的概率为：

$$\left(\frac{m}{m+n}\right)\cdot\left(\frac{m}{m+n}\right)\cdots\cdots\left(\frac{m}{m+n}\right)=\left(\frac{m}{m+n}\right)^r$$

因此 r 次中至少有一次抽到伪球的概率为：

$$P = 1 - \left(\frac{m}{m+n}\right)^{r}$$

当 r 增大时，上式的后一项将变得很小，从而 P 将很接近于 1。这就是说，在所抽的 r 个球中含有伪球，是十拿九稳的事。

蒙特卡洛方法是确定大量事物中某种特定状况问题的，即快速又管用的一种方法。

例如，测定学校里学生的弱视状况。假定全校有 1000 个学生。今随机抽查 10 个组，每组 10 人。发现有 8 个组都有人视力在 0.5 以下。问该校学生的弱视状况如何？

由于 10 组中有 8 组发现弱视现象，所以弱视的概率为 0.8。代入前面的公式，因为 m＋n＝1000，则

$$0.8 = 1 - \left(\frac{m}{1000}\right)^{10}$$

$$\left(\frac{m}{1000}\right)^{10} = 0.2$$

$$\lg\left(\frac{m}{1000}\right) = \frac{1}{10}\lg 0.2$$

求得　　　m＝851，　n＝149

即知该校大约有 15%的人是弱视。

蒙特卡洛方法在优选法中也叫统计试验法，它的不足是因为是统计方法，大数定律在起作用，免不了有机遇的成份所以抽取的次数 r 要大些才行。

戳穿“摸彩”骗局

“天有不测风云，人有旦夕祸福”。这话有对的一面，也有不对的一面，对的是，说出了事物发生的偶然性。不对的是，夸大了偶然的成份，忽视了偶然中的必然规律和量的关系，给人笼罩上一种不可知论的阴影。

举例说，在世界上火车与汽车相撞的事件，时有发生。然而，却几乎没有人，由于担心火车与汽车相撞，不去乘火车、汽车而宁愿步行。这是为什么呢？原因是：在现实中，这种相撞的可能性实在是太小了。在世界上千千万万次的车祸中，能找到的也只是极少数几例。又如，人遭遇车祸，这种可能性通常要比火车与汽车相撞的可能性大不知多少倍。然而，在人们亿万次的外出中，遭遇车祸毕竟还是占少数。这潜意识包含了一条极重要的原理——小概率原理，即一个概率很小的事件，一般不会在一次试验中发生。

下面给你介绍一个有趣的游戏。如果你新到一个班级，那么你完全可以大言不惭地对你班上 49 名新伙伴，作一次惊人的宣布：“新班级里一定有人生日是相同的！”我想大家一定会惊讶不已！可能连你本人也会感到难以置信吧！因为首先，你对他们的生日一无所知，其次，一年有 365 天，而你班上只有 50 人，难道生日会重合吗？但是，我必须告诉你，这是极可能获得成功的。

这个游戏成功的道理是什么呢？原来，班上的第一位同学要与你生日不同。那么他的生日只能在一年 365 天中的另外 364 天，即生日选择可能性为 $\frac{364}{365}$；而第二位同学，他的生日必须与你和第一位同学都不同，可能性有 $\frac{363}{365}$；第三位同学应与前三人的生日都不同，可能性为 $\frac{362}{365}$；如此等等，得到全班 50 名同学生日都不同的概率为：

$$\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\Lambda\times\frac{316}{365}$$

用计算器或对数表细心计算，可得上式结果为：

P（全不相同）=0.0295

由于 50 人中有人生日相同和全不相同这两件事，二者必居其一，所以

P（有相同）＋P（全不相同）＝1

因而　P（有相同）＝1-P（全不相同）＝1-0.0295＝0.9705

即你的成功把握有 97%，而失败的可能性不足 3%，根据小概率原理，你完全可以断定这是不会在一次游戏中发生的。

目前，在一些小市镇可以看到一种“摸彩”的招徕广告。这实际是一种赌博，赌主利用他人无知和侥幸心理，有恃无恐地把高额的奖金设置在极小概率的事件上。赌客纵然一试再试，仍不免一次次败兴而归，结果大把的钞票，哗哗流进了赌主的腰包。我们应当戳穿这种骗局。

有人见过一个“摆地摊”的赌主，他拿了八个白、八个黑的围棋子，放在一个签袋里。规定说：凡愿摸彩者，每人交一角钱作“手续费”，然后一次从袋中摸出五个棋子，赌主按地面上铺着的一张“摸子中彩表”给“彩”。

摸到	彩金
五个白	2 元
四个白	2 角
三个白	纪念品（约价 5 分）
其他	共乐一次

这个“摸彩”赌博，规则十分简单，赌金也不大，所以招徕了不少过往行人，一时围得水泄不通。许多青年不惜花一角钱去碰“运气”，结果自然扫兴者居多。

下面我们深入计算一下摸到“彩”的可能性。

$$P(\text{五个白})=\frac{8}{16}\times\frac{7}{15}\times\frac{6}{14}\times\frac{5}{13}\times\frac{4}{12}$$
$$=0.0128$$

$$P(\text{四个白})=(\frac{8}{16}\times\frac{7}{15}\times\frac{6}{14}\times\frac{5}{13}\times\frac{8}{12})\times5=0.1282$$

$$P(\text{三个白})=(\frac{8}{12}\times\frac{7}{15}\times\frac{6}{14}\times\frac{8}{13}\times\frac{7}{12})\times10=0.3589$$

（读者如果一时弄不清计算的方法，可以只看结果），现在按摸 1000 次统计；赌主“手续费”收入共 100 元，他可能需要付出的连纪念品在内的“彩金”是：

[P（五个白）×2+P（四个白）×0.2+P（三个白）×0.05] ×1000

＝ [0.0128×2+0.1282×0.2+0.3589×0.05] ×1000

＝69.19（元）

赌主可望净赚 30 元。我想看了以上的分析，读者们一定不会再怀着好奇和侥幸的心理，用自己的钱，去填塞“摸彩”赌主那永填不满的腰包吧！

布朗运动

公元 1827 年，英国生物学家布朗（Brown，1773～1858），用显微镜观看悬浮在一滴水中的花粉，发现它们像醉鬼走路一样，各自作毫无规则的运动。后来人们才知道，花粉之所以会不停息地作无序运动，是由于受水分子各方面不平衡撞击的结果，由于这个现象是布朗先生首先发现的，所以后人称它为布朗运动。

布朗运动中的花粉，像醉鬼走路一般，完全不规则。那么醉鬼是怎么行动的呢？美国著名物理学家 G·盖莫夫教授对此作了极为生动的描述：假定在某个广场的某个灯柱上靠着一个醉鬼，他突然打算走动一下，看他是怎么走的吧！先是朝一个方向颠簸几步，然后又折转方向再颠簸了几步，如此这般，每走几步就随意折一个方向。每次折转方向都是事先无法加以预计的。为了研究醉鬼的行动规律，盖莫夫教授假想广场上有一个以灯柱脚为原点的直角坐标系。醉鬼所走的第 n 个分段在两轴上的投影分别为 Yn，Yn。于是，走 n 段后醉鬼与灯柱的距离 R 满足：

$R^2=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2(y_1+y_2+\cdots+y_n)^2$

注意到醉鬼的走路是无规则的，他朝灯柱走和背灯柱走的可能性相等。因此，在 X 的各个取值中，正负参半。这样，在上式右端的第一项展开中，所有的两两乘积里，总可以找出大致数值相等符号相反，可以互相抵消的一对数来。n 的数目越大，这种抵消越彻底。因此，对于

很大的 n，我们有：

$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\approx x^2{}_1+x_2{}^2+\cdots+x^2{}_n=nx^2$

这里 x 是醉鬼所走各段路程在 x 轴上投影的均方根值。对 y，我们也可以得出同样的结果，即

$(y_1+y_2+\cdots+y_n)^2\approx y^2{}_1+y^2{}_2+\cdots+y^2{}_n=ny^2$

于是 $R^2\approx n(x^2+y^2)$

或 $R\approx\sqrt{n}\sqrt{x^2+y^2}$

后式相当于醉鬼走每段路的平均路程长 d，代入可得

$R\approx\sqrt{n}d$

这就是说，醉鬼在走了许多段不规则的弯曲路程后，距灯柱最可能的距离为各段路程的平均长度，乘以路段数的平方根。

注意上面我们是运用了统计规律，对某个醉鬼来说，他走 n 段路，未必就

距离灯柱$\sqrt{n}d$。但如果有一大群醉鬼，互不干扰地从灯柱出发，颠颠簸簸地走各自的弯弯路，那么他们距灯柱的平均值，就接近于$\sqrt{n}d$。人数越多，这种规律越精确。

通过对布朗运动的理论分析，可以看出大量的无序运动中同样也含着相当精确的有规则的结果。这就是偶然中的必然——统计规律的本质。

从《歧路亡羊》谈起

《歧路亡羊》是《列子》中一篇寓意深刻的故事。文如下：

杨子之邻人亡羊，既率其党，又请杨子之竖追之。杨子曰：“嘻！亡一羊，何追者之众？”邻人曰：“多歧路。”既返，问：“获羊乎？”曰：“亡之矣”曰：“奚亡之？”曰；“歧路之中又有歧焉，吾不知所之，所以反也。”

下面我们就来研究一下杨子的邻人，找到丢失的羊的可能性有多大。假定所有的分叉口都各有两条新的歧路。这样，每次分歧的总歧路数分别为 2^1，2^2，2^3，2^4，…，到第 n 次分歧时，共有 2n 条歧路。因为丢失的羊走到每条歧路去的可能性都是相等的，所以当羊走过 n 个三叉路口后，一个人在某条歧路上 找到羊的概率只有 $\frac{1}{2^n}$。

例如，当 n＝5 时，即使杨子的邻人动员了 6 个人去找羊，找到羊的可能性也只有

$$P=\frac{1}{2^5}\times 6=\frac{3}{16}=0.1875$$

还不及五分之一。可见，邻人空手而返，是很自然的事了！

现在我们再设想道路是这样特殊：从第二次分歧起，邻近的歧路相连通成一个新的“Y”字叉口，像下图所示那样。显然，当丢失的羊在这种特殊的歧路网上，走到第一个三叉口时，它既可能从东边，也可能从西边走入不同的两条南北走向的街。这样情形我们记为：（1，1）。接着往下有三条南北走向的街：只有一直向左转时，羊才会进入东边的那条；羊进入中间的一条街有两种可能，第一次向左而第二次向右，或第一次向右而第二次向左；只有两次都向右时，羊才能进入西边的那条街，概括三种情形，我们记为（1，2，1）。同样分析可以得知，再接下去的四条南北走向街的情形可记为：（1，3，3，1）记号中的每一个数字，都代表到达相应街的不同的路线数。如此下去，我们可以得到一个奇妙的数字表。

这个三角形表的每行两端都是 1，而且除 1 以外的每个数都等于它肩上两个数字的和。这是因为。它实际上表明了丢失的羊到达该数字地点的路线数，所以应等于两肩路线数的累加。

类似的数字表早在公元 1261 年就出现在我国数学家杨辉的著作中，所以我们称它为：“杨辉三角”。在欧洲，这种表的出现要迟上四百年，发现者就是前些节故事中提到过的法国数学家巴斯卡。因此国外常把这种表叫做‘巴斯卡三角形”。

杨辉三角第 n 排的数字和，实际上就是《歧路亡羊》中第 n 次分叉后的总的歧路数，所以应当等于 2^n。例如，表最后一排的数字和：

$$1+6+15+20+15+6+1=2^6$$

为方便起见，我们把杨辉三角中第 n 排的除开头“1”以外的第 k 个数字记为 Ckn。这样做的优点是，今后如若需要了解到达上述位置会有多少可能的路线时，无需思考，立即知道是 C^k_n 条。

下面要讲的是概率论中颇为重要的课题——独立重复试验。我们很快就会看到：将要得到的结果，与杨辉三角之间的联系是很密切的。

以掷币为例。如果我们把掷币中出的正面和反面的可能，比喻成杨辉三角中向左和向右的路线，那么，杨辉三角中的第一排（1，1），就相当于掷

第一枚币时出现的（正，反）可能；而第二排的（1，2，1），就相当于重复掷两枚币时出现的（两正，一正一反，两反）可能；而第三排中的（1，3，3，1），就相当于重复掷三枚币时出现（三正，二正一反，二反一正，三反）的可能，如此等等。这样，杨辉三角中第 n 排各数，与掷 n 枚币出现的各种可能性的数目有以下对等关系。

n 次掷币的可能情形	可能出现数
全正	1
1 次反，n-1 次正	C^1_n
2 次反，n-2 次正	C^2_n
3 次反，n-3 次正	C^3_n
… …	…
k 次反，n-k 次正	C^k_n
… …	…
全反	$\frac{1}{2^n}$

于是，我们得出，重复 n 次掷币，出现 k 次正面或反面的概率为：

$$P_n(k)=C_n^k\cdot\frac{1}{2^n}$$

例如，掷 6 次币，出现三次正面的概率

$$P^6(3)=C_6^3\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{20}{64}=0.3125$$

式中的 C^3_6＝20，是从杨辉三角表中相应位置查到的。

上面我们讲的掷币，每次出现正、反机会都是均等的。假如某事件出现的的概率是 P，那么在 n 次试验中，该事件恰好出现 k 次的概率又如何呢？这只要注意到一个事实，即在杨辉三角中，任何到达“C^k_n”的路线，都必须是恰好向右走 k 次，向左走 n-k 次，这里，假如我们把向右走相当于事件发生，向左走相当于事件不发生，那么，任何一条到达“C^k_n”位置线路的概率均为 P^k（1-P）$^{n-k}$，其中（1-P）是事件不发生的概率。由本节开头的分析知道，到达“C^k_n”的线路数即为 C^k_n，所以我们即得 n 次试验中，事件出现 k 次的概率公式：

$$P_n（k）=C^k_n\cdot P^k（1-P）^{n-k}$$

漫谈选择题评分中的倒扣

标准化考试是国际上广为流行的考试方法。

选择题是标准化考试中最常采用的题型。从题目的结构看，一般分为两部分；一部分是提出或陈述一个问题，一部分是备选答案，包含一个正确答案及几个错误答案。

虽然选择题作为考试的题型，有着许多优点，但也存在一个严重的不足，即难免有“碰运气”的成份。具体地说，对一个一无所知的人来说，单凭机遇也可能碰上正确答案。

事实上，一道λ态的选择题，随机选取恰好碰上几道正确的答案的概率是

（$\frac{1}{\lambda}$），碰到不正确答案的概率是（$1-\frac{1}{\lambda}$）。假定共有n道这样的选择题，那么光凭机遇随机选对 k 题的概率：

$$P_n(k)=C_n^k\cdot(\frac{1}{\lambda})(1-\frac{1}{\lambda})^{n-k}$$

具体些，如果我们有十道题，每道题有四种选择，即 n＝10，λ＝4。那么，可以一个个算出，随机选对 k 题的概率，列成下表：

从表上容易看出，光凭机遇选对两题或三题的可能性占了过半，如果这也“给分”的话，显然是不够合理的。正是由于存在这种不合理性，所以许多国家的考试组织者，都对各种考试作了形式各异的弥补性规定。如美国中学数学竞赛，共有 30 道选择题，每卷给 30 分基本分，以平衡随机得分。只有全错才得零分，但全错的可能性是极少的。又如我国 28 省市自治区的数学联赛试题，对选择题得分作如下规定：答对得全分，答错得 0 分，不答得 1 分。这主要是鼓励学生“知为知，不知为不知”，不要去做冒险的事。再如 1983 年高考的物理试卷中的选择题就规定：选对的，得 3 分，不选的，得 0 分，选错的倒扣 1 分。

选对题数	相应的概率 P_{10}（K）
k=0	0.0563
k=1	0.1871
k=2	0.2816 (*)
k=3	0.2503
k=4	0.1460
k=5	0.0584
k=6	0.0162
k=7	0.0031
k=8	0.0004
k=9	0.0000

上面的众多规定，既有合理的一面，也都有不尽合理的地方。从科学的角度看，要让那些碰运气选题的人得不到分，才算合理。为此，我们必须去求靠碰运气最可能会选对的题数 k*，这相当于解以下不等式组：

$$\begin{cases} P(k) \rangle P(k+1) \\ P(k) \geq P(k-1) \end{cases}$$

仅限于初中的知识，要解上面不等式组还有一定困难，但解得的结果却是很简单的。（方括号[x] 表示不超过 x 的最大整数）

在前面例中

$$k = \left[\frac{n+1}{\boldsymbol{\lambda}}\right]$$

$$k = \left[\frac{10+1}{4}\right] = 2$$

这与表中查到的相应概率的最大值是一致的。

当 k*确定之后，我们便可以设置扣分，使得选对 k*题的人，得不到分数。科学的倒扣法有两种：

第一种方法：

设答对一题得 r 分，答错一道题得 0 分，每卷以-k*r 为基本分，且总得分不取负值。显然，全对者得（n-k*）r，即为满分。如前例中的十道题，假定每道题答对得 5 分，由于 k*=2，所以基本分可定为-2×5＝-10 分，满分为 40 分。

第二种方法：

设答对一道题得 r 分，答错一题反扣 t 分，基分为 0。t 的选取，要使选对 k*题的人，得不到分数（因为我们认为他是纯粹靠运气选对的）。因此，该卷所得分数应与所扣分数相当，即 k*r＝（n-k*）t 算得：

$$\frac{r}{t} = \frac{n}{k} - 1 = \frac{n}{[\frac{n+1}{\boldsymbol{\lambda}}]} - 1$$

对于多项选择题，随着项数λ的增大，靠机遇选对的题数 k*相应减少，对于这种情形，即使不设置倒扣，也不致于对总分造成过大的影响。

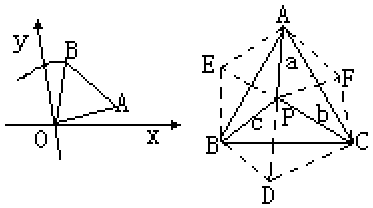
从 k*的计算式可以看出，要减少 k*的途径有两条，一是减少题目数，二是增大项数。减少题的数量是没有实际意义的，而增大备选答案的个数，又为设计题目造成了困难。怎么办呢？最近，有的考试采用了一种叫做“多解选择”的办法，每个备选答案都可能是正确或错误的（与单一选择的区别是，不是只有一个答案正确）。这样，λ个备选答案，每个答案都有“取”与“不取”两种选择，共有 2×2×2×…×2=2^{λ}种选取的方法。除去都不选的一种情形，实际项数有：

λ*=2^{λ}-1。这显然比单一选择的项数要高得多，例如，备选答案只有三个的多解选择，实际态数λ*＝2^3-1=7。态数这样高，随机选对的可能性势必很小，因而，多解选择一般是没有必要去设置倒扣的。

浅谈模糊数学

在日常生活中，我们遇到的概念不外乎两类。一类是清晰的概念，对象是否属于这个概念是明确的。例如；人、自然数、正方形等等。要么是人，要么不是人、要么是自然数、要么不是自然数、要么是正方形，要么不是正方形。另一类概念对象从属的界限是模糊的，随判断人的思维而定。例如：美不美？早不早？“便宜不便宜？等等。西施是我国古代公认的美女，有道是“情人眼里出西施”，这就是说，在一些人看来未必那么美的人，在另一些人眼里，却美得可以与西施相比拟。可见，“美”与“不美”是不存在一个精确的界限的。再说“早”与“不早”，清晨五点，对于为都市“梳妆打扮”的清洁工人来说可能算是迟了，但对大多数小学生说，却是很早很早的。至于便宜不便宜，那更是随人的感觉而异了！在客观世界中，诸如上述的模糊概念要比清晰概念多得多。对于这类模糊现象，过去已有的数学模型难以适用，需要形成新的理论和方法，即在数学和模糊现象之间架起一座桥梁。它，就是我们要讲的“模糊数学”。

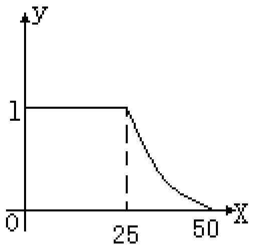
加速这座桥梁架设的是计算机科学的迅速发展。大家知道，人的大脑具有非凡的判别和处理模糊事物的能力。就拿一个孩子识别自己的母亲为例，即使这位母亲更换了新衣，改变了发式，她的孩子依然会从高矮、胖瘦、音容、姿态等迅速地作出准确判断。如果这件事让计算机来干，那就非得把这位母亲的身高、体重、行走速度、外形曲线等等，全都计算到小数点后的十几位，然后才能着手判断。这样的“精确”实在是事与愿违，走到了事物的反面。说不定就因为这位母亲脸上一时长了一个小疖，该部位的平均高度，比原来高了零点零几毫米，而使计算机作出“拒绝接受”的判断呢？难怪模糊数学的创始人，美国加利福尼亚大学教授、自控专家扎德（L.A.Za-deh）说：“所面对的系统越复杂，人们对它进行有意义的精确化能力就越低。”他生动地举了一个停车问题的例子，他说：要把汽车停在拥挤停车场的已有两辆汽车之间的空地上，这对有经验的司机来说，并非什么难事。但若用精确的方法求解，即使是一台大型电子计算机也不够用。



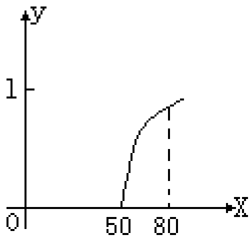
那么，要使计算机能够模仿人脑，对复杂系统进行识别和判断，出路在哪里呢？扎德教授主张从精度方面“后退”一步。他提出用隶属函数使模糊概念数学化。例如“秃头”，这显然是一种模糊概念。右图有五种头发的类型。（a）的头葫芦精光，自属标准“秃头”，隶属程度为 1；（d）的头是典型的秃顶，所以“秃”的隶属程度可定为 0.8；（c）的头上，长满了乌黑的头发，根本与“秃”沾不上边，所以“秃”的隶属程度为 0；（b）与（c）的“秃”，比之（a）、（d）则不足，比之（c）则有余，隶属程度可分别定为 0.5 和 0.3。这样“秃”这个模糊概念就可以用以下的方法定量地给出定义：

[秃头]＝1/a＋0.5/b＋0/c＋0.8/d＋0.3/e

这里的“＋”和“/”，不是通常的相加和相除。这只是一种记号。“ 1/a”表明状态 a 的隶属程度为“1”等等，“＋”则表示各种情况的并列。



（年轻人）



（年老人）

下面我们再看“年轻”和“年老”这两个模糊概念。扎德教授本人根据统计资料，拟合了这两个概念的隶属函数图象。图中横坐标表示年龄，纵坐标表示隶属程度，例如，从坐标图可以看出，50 岁以下的人不属于“年老”，而当年龄超过 50 岁时，随着岁数的增大，“年老”的隶属程度也越来越大，“人生七十古来稀”，70 岁的人“年老”的隶属程度已达 94%，同样，在坐标图中我们可以看到，25 岁以下的人，“年轻”的隶属程度为 100%，超过 25 岁，“年轻”的程度越来越小。40 岁已是“人到中年”，“年轻”的隶属程度只有 10%。

假如有人问你：“你的数学老师年轻吗？”而你的回答却是：“他的年轻隶属程度为 25%”。这样的答案自然不会有错，但显然是很别扭的。为了使人产生一种确切的印象，我们可以固定一个百分数，例如 40%，隶属程度大于或等于 40%的都叫“年轻”，反之就不叫“年轻”。在这种前提下，你对你朋友的回答也就是肯定的了，你可以明白地告诉你的朋友，你的数学老师不年轻。因为这时“年轻”一词，已从模糊概念转为明确的概念。当然，作为隶属程度分界线的那个固定百分数，是应当通过科学的分析，或者通过民意测验的统计来选取的。

再举中国古代史的分期为例，“奴隶社会”是个模糊概念。

[奴隶社会]＝1/夏+1/商＋ 0.9/西周+ 0.7/春秋+ 0.5/

战国+0.4/秦+0．3/西汉+0.1/东汉

取 0.5 的隶属程度作为奴隶社会的划分界限，那么属于奴隶社会的，就该是夏、商、西周、春秋和战国。秦、汉则不属于奴隶社会。

在精确数学中，“非常”、“很”、“不”等词是很难用数量加以表述的。但在模糊数学中，却可以让它们赋于定量化。例如，“很”表示隶属程度的平方，“不”则表示用 1 减去原隶属度等等。如 30 岁属于“年轻”的隶属程度为 0.5，那么属“很年轻”的隶属程度就只有（0.5）^{2}＝0.25，而“不很年轻”的隶属程度则为 1-（0.5）^{2}＝0.75。

可见在对事物的模糊性进行定量刻划的时候，我们同样需要用到概率统计的手段和精密数学的方法。由此可见，“模糊数学”实际上并不模糊。

模糊数学的诞生，把数学的应用领域从清晰现象扩展到模糊现象，从而使数学闯进了许多过去难于达到的“禁区”。用模糊数学的模型来编制程序，让计算机模拟人脑的思维活动，已经在文字的识别，疾病的诊断，气象的预测，火箭的发射等方面获得成功，前景十分诱人。

我国研究模糊数学虽然只有短短十几个年头，但十几年来，这门新兴的学科发展极快，表现出了强大的生命力。目前，该学科在工业、农业和国防技术的应用方面，已经吐露锋芒！

从齐王赛马谈起

我国劳动人民对于对策的认识有着很久远的历史。如《橘中秘》、《梅花谱》、《韬略元机》等象棋古谱，实际上是对象棋比赛对策的相当深入的研究。战国时期“齐王赛马”的故事，也是一个十分精彩的对策例子。

齐王与大将田忌商议赛马，双方约定：各自出上、中、下三种等级的马各一匹。每轮举行三场对抗赛。输者每输一场要付给胜者黄金一千两。由于田忌的马比齐王同等级的马都要略逊一筹，而在头一轮的比赛中，双方都是用同等级的马进行对抗，所以齐王很快赢了全部三场，得到了三千两黄金。

鉴于第一次赛马的惨败，所以当齐王满面春风地再次邀请田忌赛马时，田忌感到很为难。一方面君王的旨意不好违背，另一方面自己对这种必败的比赛失去了信心。田忌的军师孙膑是颇有才能的军事家，他得知后，便替田忌出了一个主意：用自己的下等马和国王的上等马比赛，而用自己的上等马和国王的中等马比赛，中等马和国王的下等马比赛。比赛开始，第一场国王的马以极大的优势取得了胜利。国王没有料到田忌的马竟然如此不堪一击，为此俯仰大笑，得意不已。但美景不长，在二、三场中田忌的马都取得了胜利。这一轮国王不但没赢，反而输了一千金。可笑的是，齐王输了钱还弄不清自己是怎样输的呢！

其实，齐王出马的对策有六种；(上、中、下)、(上、下、中)、(中、上、下)、(中、下、上)、(下、上、中)、(下、中、上)。括号中写的是出马的等级和顺序。田忌的对策也同样有六种。这样搭配起来就有 36 种对赛的格局。其中齐王赢三千金的格局有 6 种，赢一千金的格局有 24 种，只有 6 种才反输一千金。因此，从总的来看，田忌输的概率为六分之五。赢的概率只有六分之一。

既然田忌赢的可能性是这样小，那么孙膑是根据什么来取胜的呢？原来关键在于孙膑摸准了齐王的对策。他估计到齐王由于上一次的大获全胜，这一次是不会轻易更改这种对策的。这就使得孙膑在对局前便把握了主动权，有的放矢地制定了“退一步，进两步”的策略。

齐王失败的关键在于自己的策略被对方洞悉。然而，在一般的竞争中，相对的双方都是在不知道对方策略的情况下各自选择自己的最优对策的。下面是第二次世界大战期间一个著名的对策战例。

1943 年 2 月，美军获悉：日本舰队集结南太平洋的新不列颠岛，准备越过俾斯麦海开往伊里安岛。美西南太平洋空军司令肯尼，奉命拦截轰炸日本舰队，从新不列颠岛去伊里安岛的航线有南北两条，航程约为三天。未来三天北路气候阴雨连绵，南路晴好。美军在拦截前务必要派侦察机侦察，待发现日舰航线后，再出动大批轰炸机进行轰炸。

对美军来说，全部可能的方案如下：

(N，N) 方案：集中侦察北路，派少量侦察机侦察南路，日舰也走北路。虽然天气不好，但可望一天内发现日舰，有两天时间轰炸；

(N，S) 方案；集中侦察北路，派少量侦察机侦察南路，日舰走南路。因南路天气晴好，少量侦察飞机用一天也能发现日舰，轰炸时间也只有两天；

(S，N) 方案：集中侦察南路，派少量侦察机侦察北路，日舰走北路。少量的飞机在阴雨的北路侦察，发现目标需要两天，轰炸时间只有一天；

(S，S) 方案：集中侦察南路，派少量侦察机侦察北路，日也舰走南路。

能立即发现日舰，这样有三天的轰炸时间。

以上各方案，美军赢得的轰炸时间简化如下表：

日 \ 美	N S
N S	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

对美军来说，最理想的方案是（S，S），因为它可以赢得三天轰炸时间。但因日方对策预先并不知道，如果贸然集中力量侦察南路，可能会落得最差的（S，N）结果。同样，日方在考虑对策的时候，既要看到自己最佳的方案（S，N），也不能不估计到对自己最不利的方案（S，S）。因此，对日舰来说，走南路是比较冒险的。美军司令肯尼将军认真研究，毅然决定把重点放在北路。结果这场载入史册的俾斯麦海海战，最后以美军获胜告终。

为叙述方便，我们把美方赢得轰炸的时间表，省略去策略部分，只留下矩形的数字阵，简称赢得矩阵。

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

像上面那样，给出赢得矩阵的对策，叫做矩阵对策。“齐王赛马”是一种矩阵对策。大家所熟悉的“锤子，剪刀，布”的游戏，也是一种矩阵对策。如果约定：胜者得 1 分，负者得-1 分，平手得 0 分，而且双方的策略都按锤子，剪刀，布的顺序。那么简化后某一方的赢得矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

有趣的智力问题的启示

有一个通过推断别人的心理状态，而得出自我判断的绝妙例子。问题是这样的：甲、乙、丙三个人在一起午睡。某好事者将他们的前额都涂上黑记。醒后，三人相视大笑。因为每人都看到两个朋友的额被涂黑了。突然其中更为机灵的某甲不笑了，赶快拿水洗自己的额头。问某甲是如何断定自己的额头也被涂黑的？

原来，某甲心里想：我看到乙、丙两人的额都被涂黑，因此发笑。如果我的额是清洁的，那么乙则是光因丙的额被涂黑而笑了！假如我的这种推想是成立的，乙大概就会警觉到自己的额也被涂黑了，因为否则丙看到的两个人的额都是清洁的，有什么值得可笑呢？然而现实是，丙在笑，乙也在笑。从而甲断定自己的额一定也被涂黑了。

在对策中，各方的心理状态都是这样的：从最好的结果着眼，考虑最坏的可能。

根据上述的指导思想，甲方应在自己的每一个策略中，首先注意那些对自己最不利的赢得。因为必须估计到对方会选取使自己处于最不利地位的策略。不能去走冒险棋，以致于“一着失算，全盘皆输”。但甲方如若能从各个策略的最小赢得中间，去寻求最有利的策略。即从各策略的极小赢得中，去找极大的一个。这不仅是明智的，而且可以立于不败之地。同样的道理，乙方必须从自己的策略会造成对方较大的赢得着手，而从各个极大中去寻求使自己损失最小的策略。即从各策略的对方极大赢得中，去找极小的一个。

在继续讨论之前，我们先思考一个有趣的智力问题：有 m×n 个人，排成 m 行、n 列的人阵。今从每行中找出本行最矮的人（右图中⊙表示），再在各行最矮的人中选出最高者（图中用●表示），把这人称为“矮高”。现在再从每列中找出该列最高的人（图中用*表示，），而从各列最高的人中选出最矮者，把这人叫做“高矮”。现在问：是“高矮”高呢？还是“矮高”高？

答案是肯定的：“高矮”绝不会低于“矮高”。事实上，如果“★”与“●”重合，则“高矮”同“矮高”是同一个人，当然一样高。如果“★”与“●”在同一行或同一列。那么根据他们各自的规定，“矮高”是不可能高于“高矮”的。最后，如若像上图那样“★”和“●”在不同的行和列，那么我们取“●”所在行和“★”所在列的交叉处为“■”。根据规定，同在一行的“●”和“■”，前者不会比后者高；又在同一列的“■”和“★”，前者也不会比后者高。因此“●”绝不会高于“★”。即三种情况都有“矮高”不高于“高矮”。特别当“矮高”与“高矮”一样高时，“★”、“■”和“●”三者的高度必须是相等的。

现在回到前面的对策问题上来，如果一个二人对策，甲方■的赢得矩阵是：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & & \Lambda \\ a_{m}1 & a_{m2} & \Lambda & amn \end{bmatrix}$$

这就像上面讲的 m×n 人阵一样，对甲方来说，要找的是各行最小赢得中的极大，即找“矮高”——“●”；而对乙方来说，则需要找各列对方最大

赢得中的极小，即找“高矮”——“★”。如若在矩阵中，“●”与“★”一样大，那么甲乙双方都会一致选取相应于“■”的策略，因为这是在不知对方将采用什么策略的情况下，对双主来说都是最保险和最有利的，这时相应于“■”的策略，称为对策的最优策略。

诚然，在一般情况下“矮高”是低于“高矮”的，这时最优纯策略不存在。“齐王赛马”是一种没有最优纯策略的对策。“锤子、剪刀、布”的游戏，也是一种没有最优纯策略的对策。游戏中的“高矮”是 1，而“矮高”是-1，两者是显然不相等的。因此这样游戏的胜负，只好靠随机性而定了。

对电影《血疑》的质疑

日本电视连续剧《血疑》，是围绕着血型的疑问而展开的。剧中的四个主要人物，相良、理惠、幸子和光夫的血型均为 AB、RH 阴性。他们之间的血缘关系是：幸子为相良与理惠所生，光夫为相良与多加子所生。多加子的血型在剧中虽说没有亮相，但从科学角度分析，也不应当是任意的。

《血疑》的故事情节，当然是虚构的，本文之要想从科学的角度研究一下《血疑》中的血型结构，究竟有多大的现实可能性。

1990 年美籍奥地利生物学家朗德斯特纳（Land—steiner）发现了血球的凝结现象。此后，学者们又陆续发现了人类的血液可以按照凝结与否而分为若干大类，并称之为血型。1924 年，波斯汀（Bernstein）提出了“三复等位基因”的学说。这一著名学说的要点是：人类的血型受体细胞第七对染色体中的 A 基因、B 基因和 O 基因控制。在一个位点上，A、B、C 三种基因必居其一。这样，在受精过程中，两条染色体相配，可以表现出六种基因的基本组合，OO，OA，OB，AA，AB，BB。由于 A、B 基因属于显性，O 基因属于隐性，所以 A、B 能表现出来，O 却不能表现出来。因此，上述六种基因组合中，OA 与 AA 均表现为 A 型，OB 与 BB 均表现为 B 型加上 O 型（OO）与 AB 型，一共有四种表现型：

据有关资料统计，世界上不同人种中的血型分布有很大的不同。以黄色人种为例，血型为 A 的占 28%，血型为 B 的占 29%，AB 的占 8%，O 型占 35%。血型中 Rh 阴性者占 1%。

由于《血疑》的故事是发生在黄种人的日本，所以在人口中出现 AB、Rh 阴性的概率为：

$P_1 = 8\% \times 1\% = 8 \times 10^{-4}$

即万分之八，而同是 AB、Rh 阴性的相良和理惠结合的概率为：$P_2 = P_1 \times P_1 = (8 \times 10^{-4})^2 = 6.4 \times 10^{-7}$。他们的子女的血型，按奥地利遗传学家孟德尔（Mendel，1822～1884）的分离自由组合定律，可能有 A 型、B型和AB型三种。由下图可知，自由组合中AB型占 $\frac{2}{4}$。注意到幸子是女性，又其血型不仅是 AB 型，而且还是 Rh 阴性等各种独立的限制，可得这一情形出现的概率为：

$$P_3 = \frac{2}{4} \times 1\% \times \frac{1}{2} = 2.5 \times 10^{-3}$$

综合上述，相良、理惠及其女儿幸于这一血缘链中，三者血型均为 AB、Rh 阴性的概率为：

$$P_4 = P_2 \times P_3 = 6.4 \times 10^{-7} \times 2.5 \times 10^{-3} = 1.6 \times 10^{-9}$$

现在看另一条血缘链。由于相良和光夫父子的血型都是 AB 型，因而尽管不知道母亲多加子的血型，但可以肯定她的血型不会是 O 型。因为如若是 O 型，就不可能分离组合出 AB 型的子代。这样，多加子的血型组合基因只能是 AO，AA，BO， BB， AB 五种。

对多加子的上述五种可能的血型基因组合，像前面那样利用孟德尔分离组合定律，逐一加以计算。考虑到黄种人的多加子，能够获得各种基因组合的百分比，便可算得光夫血型为 AB、Rh 阴性的概率如下表：

多加子血型基因	血型基因所占比例	相应光夫 AB 、 Rh 阴性概率
AO	14 %	0.000175
AA	14 %	0.00035
BO	14.5 %	0.000181
BB	14.5 %	0.000363
AB	8 %	0.0002
	65 %	P_5=0.001267

这就是说，在相良血型为 AB 的前提下，光夫血型为 AB，Rh 阴性的概率为：

$$P_5 = 1.267 \times 10^{-3}$$

最后，我们来研究相良、理惠、幸子和光夫四人血型同为 AB、Rh 阴性的可能性。很明显，幸子与光夫之间的血型，是不可能没有关系的。因为他们毕竟是同父异母的兄妹。所 以，当我们算得相良、理惠和幸子的血型同为 AB、Rh 阴性的概率 P4 之后，继而计算光夫的血型概率时，就必须考虑“ 同父 ”的条件。好在当我们计算 P5 时，已经把相良血型是 AB 作为前提。于是，我们终于得出四人血型同为 AB、Rh 阴性的概率：

$$P = P_4 \times P = 1.6 \times 10^{-9} \times 1.267 \times 10^{-3}$$

$$= 2 \times 10^{-12} = \frac{1}{5 \times 10^{11}}$$

五千亿分之一！这比千载难逢的“ 生日相同五同胞 ”的概率还要小三十倍。因此，我们可以断言：电视剧《血疑》中的血型结构，完全是一种臆造和夸张，在现实世界上是不可能发生的。这，就是关于电视连续剧《血疑》的质疑的科学结论。

巧解几何题

在平面解析几何中，利用坐标系的平移、旋转可简化二次曲线方程（即把一般式化为标准式）。利用旋转变换还可解一些几何问题，我们来看几个例子。

例 1　试证 XY 平面上不存在顶点全是有理点(两个坐标均系为有理数的点）的正三角形。

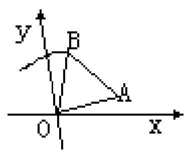
证　用反证法。设△OAN 是各顶点俱为有理点的正三角形，又设 A（X_1，y_1）、B（X_2，y_2）（图 1）。

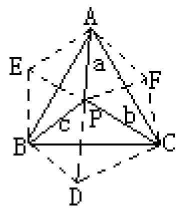
今将△ABO 绕点 O 逆时针旋 60°，此时 A 旋至 B 处，而由坐标变换公式有：

$$\begin{cases} x_2 = x_1\cos 60° - y_1 \sin 60° \\ y_2 + x_1 \sin 60° - y_1 \cos 60° \end{cases}$$

即$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2}(x_1 - \sqrt{3}y_1) \\ y_2 \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x_1 + y_1) \end{cases}$　　故$\begin{cases} \sqrt{3}x_1 = 2y_2 - y_1 \\ \sqrt{3}y_1 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$

此两式右为有理数，而式左为无理数，这不可能！从而证明前设不真，命题成立。





例 2　设 P 为正△ABC 内任一点，它到三顶点 A、B、C 的距离分别是 a、b、c，试证$S\triangle ABC = \sqrt{3}/8\cdot$（$a^2+b^2+c^2$）$+3/2\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，这里　P=（a+ b+ c）/2（图 2）。

证　将△CPB 绕 B 旋 60°至△AEB 处；将△ACP 绕 C 旋 60°至△BCD 处；将△APB 绕 A 旋 60°至△AFC 处；则 $S_{AFCDBE}=2S_{\triangle ABC}$。

连 PD、PE、PF，易证△PDB≌△PEA≌△PFC，且每个三角形三边分别为 a、b、c，又△AFP，△CPD、△PBE 是等边三角形，它们边长分别是 a、b、c。

上述六个小三角形面积和即 S_{AFCDBF}，故

$S_{AFCDBE}=3\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}+\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)/4$。这里

$p=$（a+b+c）$/2$。

$\therefore S\triangle ABC = \dfrac{1}{2}S_{AFCDBE}$即上式右之半，证毕。

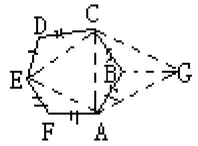
例 3　已知六边形 ABCDEF 中∠A=∠C=∠E=120°,又 AN=AF，CB=CD，ED=EF，试证△ACE 为正三角形。（图 3-1）。

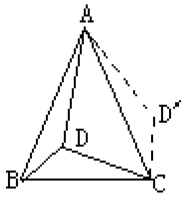
证　将△FAE 绕 A 顺时针旋转 120°，使 AF 与 AB 重合而至△ABG 处，连 CG。

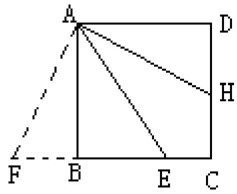
因∠A＝∠C=∠E= 120°，注意到∠D＋∠F＋∠B＝360°，又 DE＝EF＝BG，DC＝BD，故△BGC 可视为△DEC 绕 C 逆时针旋转 120°的结果。

故由 AN＝AG，EC＝CG，AC＝AC，∴△ACE≌△ACG。

从而$\angle EAC = \angle CAG = \frac{1}{2}\angle EAG = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$。







同理可证∠ECA＝∠ACG＝60°，故△ANC 是正三角形。

还有一些问题，也可用旋转变换来解，比如：

1.在△ABC 中 AB＝AC，D 为其内任一点，又∠ADB＞∠ADC，求证 DC DB。（图 3－2）。

[提示：将△ABD 旋转到△ACD′位置]

2.如图 AE 为正方形 ABCD 内一直线，AF 平分∠EAD，求证 DF＝AN－BE。（见图 3－3）。

[提示：将△ADF 旋至△ABF′位置]

局部调整求极值

利用算术一几何平均值不等式求定和极值问题，这首先应当在证明了该不等式之后才行，要是不知道这个不等式怎么办？下面我们再介绍一种办法——局部调整法。

若知正实数 $x_1<X_2<X_3<\cdots<x_n$，且 $x_1+X_2+\cdots+x_n=a$（常数）。今考虑取 $x_1'=x_2'=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，$x_3'=$，$\cdots x_n$，那么 $x'_1x'_4x'_3\cdots x'_n>x_1x_2x_3\text{-}x_n$，这只须注意到 $[\frac{1}{2}(x_1+x_2)]^2-x_1x_2=[1/2(x_1-x_2)]^2\geq 0$ 即可，这样局部调整 x_k，使和不变、积不减。

有了上面的知识我们以三个未知数为例，谈谈这种方法。我们知道正△ABC 内任一点 P 到三边距离 x、y、z 之和等于该三角形的高 h（图 3－4），试问积 xyz 最大值是什么？若令：

$x_1=x$，$y_1=z_1=\frac{1}{2}(y+z)$，$y_2=y_1z_2=x_2=\frac{1}{2}(z_1+x_1)$，

$z_3=z_2$，$x_3=y_3=\frac{1}{2}(x_2+y_2)$，如此下去Λ

显然 $x+y+z=x_1+y_1+z_1=x_2+y_2+z_2=\cdots$

且 $xyz<x_1y_1z_1<x_2y_2z_2<\cdots$

只须证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=h/3$（这请读者去完成），便有：

■

$xyz\leq\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_nz_n=(h/3)^3$，即 xyz 的极大值是 $(h/3)^3$，若 $x+y+z=h$ 时。

我们还可以对它给出一个几何解释：若 P 到三边距离 X、y、Z 视为 P 的坐标，那么（x_1，y_1，z_1）（X_2，y_2，z_2）、…代表的点 P_1、P_2…正如图 3－5 所示（这些线段分别平行于某一边），显然它们越来越接近于 0 点，而 0 正是 x＝y＝z 的点。

我们还可以再给出一个局部调整办法，这比上面的办法要快。若 $x<y<z$，令 $h/3=a$，若 $y<a<z$，可设 $x_1=x$，$y_1=a$，$z_1=y+(z-a)$，故有

$y_1z_1-y_2=a(y+z-a)-yz=(a-y)(z-a)>0$，

$\therefore xyz<x_1y_1z_1$。

再令 $y_2=y_1$，$z_2=x_2=\frac{1}{2}(x_1+z_1)$

则 $x_2=y_2=z_2$，这时又有：

$xyz<x_1y_1z_1<x_2y_2z_2=a^3$，它与上面的结果相同（注意这时已无法再调）。

顺便讲一句，这个方法正如为我们提供一个证明（用数学归纳法）算术—几何平均值不等式的方法。

赋值解题

所谓赋值解题，是指在要证或求解的式子赋上某些特殊的值，以使解题过程简化。

我们先来看一个在计算组合数时常遇到的例子。

例1（1）求$\sum_{k=0}^{n}C_n^k$的值；

（2）计算$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k$的值。

解 （1）由二项公式（1＋x）$^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k$

用x＝1代入上式，可有$\sum_{k=0}^{n}C_n^k=(1+1)^n=2^n$。

（2）同样用 x＝-1 代入上式可有：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k=(1-1)^n=0$$

这里，是在等式（*）中，通过赋值计算一些式子的和。直接计算它们是困难的。下面的例子也许更为精彩，它可以说是赋值解题的典型。

例 2 求 f（x）＝（$8x^6-6x^5+5x^4-4x^3+3x^2-2x-3$）^{1982}的展开式中所有项系数和。

乍一看，这题几乎无法算，但仔细一想你又不难得到（仿照例 1 的方法）下面的解法：

解 若设 f（x）的展开式为 f（x）＝$\sum_{k=0}^{m}a_k C^k x^k$，

（m＝1982×6）

显然当 x＝1 时，式右为 f（1）展开式中诸项系统和，即 f（x）＝$\sum_{k=0}^{n}a_1$，

而 f（1）＝（8-6＋5-4＋3-2-3）^{1982}

$1^{1982}=1$。

故 f（x）展开式诸系数和为 1。

赋值解题若和其他方法联用，有时效果更佳。请看：

例 3 求 f（x）＝cos2x＋cos2（x+60°）+cos2（x＋120°）的值。

解 先求 f（x）的导数得：

f′（x）＝（过程略）

故 f（x）是常数，再令 x＝0。代入 f（x）有：

f（0）＝1＋1/4＋1/4＝3/2，f（x）＝3/2。

故 f（x）= 3/2

例 4 试求在自然数集上的函数 f（x），使 f（m＋n）＝f（m）＋f（n）＋mn，且 f（1）＝1。

解 令 n=1，则有正 f（m＋1）=f（m）＋1＋m，再依次令 m＝1，2，…，n-1，则有：

f（2）＝f（1）＋2，f（3）＝f（2）＋3，…，

f（n）＝f（n－1）＋n，

将上列诸式两边相加有（注意左、右两边相消）：

f（n）　＝f（1）＋2＋…＋n

　　　　＝1＋2＋…＋n＝n（n+1）/2。

类似地我们不难解下列问题：

（1）求$\sum_{k=0}^{n}7^{k}C_{n}^{k}$。［提示：考虑（7＋1）^{n}］

（2）分别求$\left(\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^{16}$展开式中有理系数与无理系数之和。

［答：有理系数和为 $1/2^{8}$，无理系数和为 0］

赋值证题

有这样一道题：

在线段 AB 的两端分别标以红、蓝两色。在段线中间插入 n 个分点，在各分点随意地标上红色或蓝色，这样就把原线段分为 n＋1 个不重迭的小线段，试证异色线段（两端涂不同颜色者）的个数是奇数。（1979 年安徽数学竞赛题）

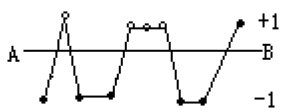
它的证明可以用归纳法完成（当然也可以直接去考虑）。下面我们来考虑另一种方法（见图 4－1）。

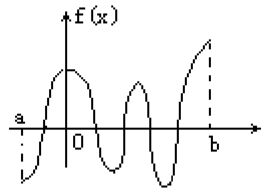
先把这些点赋值：红点表示+1，蓝点表示-1，再把它们

在平面上表示的点描出，然后把相邻点间连成线段，显然这时对应的异色线段必穿过横轴 AB，而同色线段则不穿过。我们知道：当点从+1 变到-1 时，连续曲线穿过横轴的次数是奇数，命题得证。

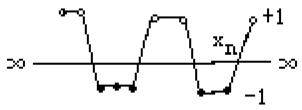
由上我们还不难想到下面的事实（图 4－2）：对于多项式 f（x）$=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 来说，若 f（a）与 f（b）异号，则 f（x）在（a，b）区间必有奇数个相异的实根。

下面再看一个例子。





有男女共 n 人围坐一圆桌，今在他们任意两人中间均置一花朵，其中同性者中间插一红花，异性者中间插一蓝花。今若红花与蓝花朵数一样，则男女人数之和 n 必是 4 的倍数。



我们把男人看成＋1，女人看成-1，则红花看成（＋1）·（＋1）或（-1）·（-1），而蓝花看成（＋1）·（-1）或（－1）·（＋1），这时问题变为：

x_1，x_2，…，x_n 是一组数，它们均为＋1 或-1，若 $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1=0$，则 n 必是 4 的倍数。（图 4－3）。

综上所述，可以知道：在 x_1，x_1' 之间异色线段必有偶数个（注意它是从＋ 1 到＋1，-1 或从-1 到-1），即 x_1x_2，x_2x_3，…，x_1 中的一个数是偶数，令为 2k。又由 $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1=0$ 知 x_1x_2，x_2x_3，…x_nx_1 中＋1 的个数也为偶数 2k，于是 n＝4k。

读者不妨自己再找几个赋值办法解决的更有趣的例子。

共轭无理数对在数学中的运用

像复数 a＋bi 和 a-bi（a、b 是实数）称为共轭复数对一样，我们称 p

$p\sqrt{c}+q\sqrt{d}$和$p\sqrt{c}-q\sqrt{d}$（这里p、q为有理数，$\sqrt{c}$、$\sqrt{d}$为无理数）为共轭无理数对。

共轭复数在解题中（特别是解一些复数问题）用途很大，共轭无理数在解某些问题时用途也很大（因为它有一些特殊性质），这里先谈谈它在计算中的应用。

例1 计算$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$。

解2＋$\sqrt{2+\sqrt{3}}$和2-$\sqrt{2+\sqrt{3}}$是共轭无理数对，且它们的积是2-$\sqrt{3}$，而它和2＋$\sqrt{3}$又是一对共轭无理数，且它们的积是1。从而

原式$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$

注 1　这个结论可拓广为：

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdots\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}_{n\text{重}}}$$

$$\sqrt{\underbrace{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}_{n\text{重}}}$$

$$=1$$

注 2 我们还可以计算：

$$3\sqrt{1-\sqrt{2}}\cdot6\sqrt{3+2\sqrt{2}}=3\sqrt{1-\sqrt{2}}\cdot6\sqrt{(1+\sqrt{2})^{2}}$$

$$=3\sqrt{(1-\sqrt{2})(\sqrt{1+2})}=3\sqrt{-1}=-1$$

例 2 计算$\log_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$的值。

解 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$和$\sqrt{3}+\sqrt{2}$是一对共轭无理数，且它们互为倒数（它们之积为

1），

又 $\log\frac{1}{a}=-1,(a\rangle 0,a\neq1)$

故原式=-1。

解这个结论可拓广为：

$\log_{(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})}(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})=-1\quad(a\rangle 0)$

由于共轭无理数对有些好性质，人们常去拟造一些级数求和问题。比如：

例3 求$\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$的值。

解　考虑$\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$和它的共轭无理数$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$之积为1，这样

原式$=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=9$（注意前后项相消）。

注 这个结论可推广为：

若$\{a_k\}$是公差为 d 的等差数列（k＝1，2，…，n），则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})/d$$

我们再来看两个解方程的例子。

例4 解方程$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{3x-7}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{7x+3}$

解 由前面我们知道$\sqrt{3}+\sqrt{2}$与其共轭的无理数$\sqrt{3}-\sqrt{2}$之积为1，即互为倒数，这样原方程化为：

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{3x-7}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-7(x+3)}$

从而 3x- 7＝－（7x＋3），解得 x＝4/10。

例5 解方程$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{x}+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{x}=4$

解 仍注意到2＋$\sqrt{3}$与2 - $\sqrt{3}$互为倒数，故若令y＝$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{x}$，

则$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{x}=(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{-x}=y^{-1}$

这时原方程化为：

$y+y^{-1}=4$ 即 $y^2-4y+1=0$。

解得y＝2t±$\sqrt{3}$，从而求得x＝±2。

我们再看一个利用共轭无理数对性质求值的题目。

例6 若a、b分别表示（3 - $\sqrt{7}$）$^{-1}$的整数和小数部分，求a^2＋（1＋$\sqrt{7}$）a b 的值。

解 由3 - $\sqrt{7}$和它的共轭无理数3＋$\sqrt{7}$之积为2，

即有1 / （3 - $\sqrt{7}$） ＝ （3＋$\sqrt{7}$） / 2。

又因2＜$\sqrt{7}$＜3，故0＜（$\sqrt{7}$ - 1） / 2＜1。

再 1 / （3 - $\sqrt{7}$） ＝2＋（$\sqrt{7}$ - 1） / 2从而a＝2 *

b＝（$\sqrt{7}$ - 1） / 2。

这样 a2＋（1＋$\sqrt{7}$）ab＝4＋6＝10。

通过上面几例，我们已经看到共轭无理数对在计算中的应用。当然还不止这些，但我们毕竟可以从中窥见一斑了。更多的应用请有兴趣的读者去研究。

上文我们谈到了共轭无理数对在计算中的应用，本文打算谈谈它在证明中的应用，先来看一个例子。

例 1 试证$(\sqrt{26}+5)^{1981}$的小数表示中，小数点后紧接着至少有连续的1981 个 0。

证 为研究该问题我们先考虑$\sqrt{26}+5$的共轭无理数$\sqrt{26}$ - 5，由于它们的积是 1 知它们互为倒数，即$0\langle\sqrt{26}-5=1/(\sqrt{26}+5)\langle 1/(5+5)=1/10$

这样$(\sqrt{26}-5)^{1981}-(1/10)^{1981}$ (*)

又由于1981是奇数，知：若$(\sqrt{26}+5)^{1981}=a+b\sqrt{26}$，

则$(\sqrt{26}+5)^{1981}=a-b\sqrt{26}$（这里a、b是整数），换句话说：

$(\sqrt{26}+5)^{1981}-(\sqrt{26}-5)^{1981}$是整数，或者$(\sqrt{26}+5)^{1981}$和$(\sqrt{26}-5)^{1981}$的小

数部分相同，这样：

由（*）知$(\sqrt{26}-5)^{1981}$的小数部分，小数点后至少有1981个0，从而$(\sqrt{26}+5)^{1981}$小数部分小数点后至少有 1981 个 0。

再来看一个例子。

例2 若$a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$，$b_n=\sqrt{4n+2}$试证：〔a_n〕＝〔b_n〕，这里〔x〕表示不超过 x 的最大整数。

证欲证［a_n〕＝〔b_n〕，只须证

$|\sqrt{4n+2}-(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})|\langle 1$即可(因为$n\langle\sqrt{n(n+1)}\langle n+1,\ 4n+1\langle a_n^2\langle 4n+2=b_n^2$)

考虑$|\sqrt{4n+2}-(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})|$

$=|2n+1-2\sqrt{n(n+1)}|/[\sqrt{4n+2}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]$

$=1/[\sqrt{4n+2}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\cdot\{1/[2n+1+2\sqrt{n(n+1)}]\}$

$\leq 1/[(2\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n})(2n+2n)]$

$=1/16n\sqrt{n}\langle 1\quad (n\geq 1)$

从而〔a_n〕＝〔b_n］。

利用共轭无理数对，有进还可以判断某些方程（特别是某些不定方程）有无根。请看：

例 3　试证方程|x^2-$2y^2$|＝1 有无穷多组整数解。

证 考虑到（$1+\sqrt{2}$）（$1-\sqrt{2}$）＝-1，故有

〔（$1+\sqrt{2}$）（$1-\sqrt{2}$）〕^{n}＝（-1）^{n}

若设 $x_n+y_n\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^n$

则 $x_n-y_n\sqrt{n}=(1+\sqrt{2})^n$

由是 $x_n^2-y_n^2=[(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})]^n=(-1)^n$

显然 x_n，y_n是解。这样

$y_n=[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n]/2\sqrt{2}$, (这里$n=1,2,3,\Lambda\Lambda$)

显然 x_n，y_n。都是整数，这由上面式子可以看出。

再看一个例子。

例4 试证：不论x、y、z、t为何有理数时，等式$(x+y\sqrt{5})^4+(z+t\sqrt{5})^4=2+\sqrt{5}$

均不成立（换句话说，该方程无有理解）。

证 我们只须注意到共轭无理数对$a+b\sqrt{c}$和$a-b\sqrt{c}$的如下性质：

若（$a+b\sqrt{c}$）^{n}＝$p+q\sqrt{c}$，则（$a-\sqrt{c}$）^{n}＝$p-q\sqrt{c}$就行了（这里a、b、p、q是有理数，$\sqrt{c}$是无理数，但c是有理数）。

这样若题设成立，便有下式也成立：

$(x-y\sqrt{5})^4+(z-t\sqrt{5})^4=2-\sqrt{5}$

但上式，式右大于 0，而式左小于 0，矛盾！故题设结论不能成立。

注 $(a\pm b\sqrt{c})^n=p\pm q\sqrt{c}$的性质，本文多次引用，它的证明不难用二项式

展开去做。

利用此性质还可证明有理系数多项式的无理很成对且以共轭形式出现，这留给读者考虑。

从数学游戏谈起

你可能很熟悉，自然数能被 3、4、5、8 等整数整除的判别法。

3 |a（域9|a，这里|表示整除的意思，a是自然数，下同） ⇔ a的各位数字和能被 3（或 9）整除；

4|a ⇔ a的末两位数能被4整除；

5|a ⇔ a是以5或0结尾的自然数；

8|a ⇔ a的末三位数能被8整除。

然而对于能被 7、13 等数整除的判别法呢，也许你还并不十分熟悉。这儿我们将从一则数学游戏中引出一个自然数能被 7、11、13 整除的判别法。

一则数学游戏

下面这则游戏几乎为人们熟知：

任何一个三位数$\overline{abc}$，当你把它双写成为一个六位数$\overline{abcabc}$，若分别用7、11、13接连去除这个六位数，这时你会发现最后的商仍是$\overline{abc}$。

比如 789 双写后为 789789，这时你用 7、11、13 接连去除它，商仍是 789，即：

789789÷7÷11÷13＝789。

它的道理何在？读者不难从 7×11×13＝1001 看出：任何一个三位数乘上 1001 后，便得到一个由该三位数双写而成的六位数。

一个判别方法

上面的游戏也许使你觉得满有意思，然而你若明白了它的道理后，又觉得乏味了。可是你也许不曾想到，它可以给我们一个关于自然数能否被 7、11、13 整除的判别法呢！

一个多位数$\overline{abc\cdots w\text{-}xyz}$能被7（或11或13）整除 ⇔ （$\overline{abc\cdots w}$ - $\overline{xyz}$）能被 7（或 11 或 13）整除。

它的证明并不麻烦，我们仅以 7 为例说明（11、13 的情况证明类同）。

先证必要性，由7|$\overline{abc\cdots wxyz}$，又由前面游戏知，7|$\overline{xyzxyz}$，|

则7| （$\overline{abc\cdots\cdots wxyz}$ - $\overline{xyzxyz}$），

而$\overline{abc\cdots\cdots wxyz}$ - $\overline{xyzxyz}$＝（$\overline{abc\cdots\cdots w}$ - $\overline{xyz}$）×1000，

＋1000（符号＋表示不能整除），从而

71（$\overline{abc\cdots\cdots w}$ - $\overline{xyz}$）。

充分性的证明道理与上类同，略。

用语言来叙述这个方法即：判断一个多位数能否被 7、11 或 13 整除，只须检验这个数的末尾三位与三位前面的数字组成的数之差能否被 7、11 或 13 整除即可。

应该指出：上述方法中无论前几位减去后面三位，还是后面三位减去前面几位均可（这要视具体数而定），因为它们至多相差一个符号。又，对于

位数较多的数来讲，上面步聚可重复进行，直到它的位数不多于三位为止——对于三位或三位以下的数来讲，判别它的整除性并不困难。

几个例子

例 1　判断 325248 可否被 7、11、13 整除。

解　因 325-248＝77，而 7|77，又 11|77，故 325248 可被 7 和 11 整除。又 13＋77，故 325248 不能整除 13。

例 2　判断 99485321 可否被 7、11、13 整除。

解　因 99485-321＝99164，又 164-99＝65，（或 99-164＝-65），

而 13|65，故 99485321 可被 13 整除。

但 7＋65，且 11＋65，知 99485321 不能被 7 或 11 整除。

例子不多举了，倘若读者有兴趣，不妨找几个数算算看。

你能算出它们的尾数吗

数，有许多特性，我们只要细心观察、认真总结，是会发现某些规律的。好，下面我们来看几个推算数的尾数。

37！的末八位数

数学上有个符号叫阶乘，比如 n！是代表 n×（n-1）×……×3×2×1，当 n 较大时，这个数增长得很快，以至算起来非常困难。37！就是一个很大的数。请问，不用把这个数具体算出来，你能判断出 37 !的末八位数是几吗？

乍一看你会觉得棘手，可是只要仔细分析，你便会发现其中的“奥妙”，问题又变得那样容易了：

37！＝37×36×35×…×3×2×1

这里面有 5、15、25、35 这四个以 5 结尾的数，它们乘以任何双数（偶数）后都是 10 的倍数，即以 0 结尾，而以 0 结尾的整数乘任何别的整数后仍是以 0 结尾，这样加上 10、20、30 末尾的三个 0 共七个 0 了，请注意：25×4（或 25 乘 4 的倍数）时，它的末尾出现两个 0。这样 37！的末八位就全部是 0 了。

麦森质数的尾数

只能被 1 和它自身整除的自然数叫作质数。数论中研究了许多有趣的质数，比如麦森质数就是其中之一。

形如 2p-1 的质数叫麦森质数（它是麦森这个人最先研究的），这种质数到目前为止仅发现了 30 个，其中最大的是 2^p-1，它有 65050 位，这是 1985 年底美国科学家在大型电子计算机上花了一个多小时才找到的，它也是目前人们所知道的最大质数。

请问：你能算出这个数的最后一位是几吗？

这么大的数怎么算？别着急，我们先来看这张表：

指数 n	1 2 3 4	5 6 7 8	……
2^n 的尾数	2 4 8 6	2 4 8 6	……

费尔马数的尾数

细心的读者也许已经发现了点秘密：2 的 n 次方幂其尾数随 n 的变化而有规律地变化：以 2、4、8、6 循环着。这样，我们算出 21609÷4=54022…3，便知道 2^{216091} 的尾数是 8，从而这个到目前为止人们找到的最大质数的尾数是 7。

形如 $F_n=n^{2^n}+1$ 的数叫费尔马数。费尔马是十七世纪法国一位业余数学家，他发现过许多著名的定理，提出过不少著名的猜想，然而这些都是记在他所读过的书的空白处。费尔马在验证了当 n＝0、1、2、3、4 时，Fn 都是质数后便宣称：对任何自然数 n，Fn 都是质数。数学家欧拉首先指出了 n＝5 时，它已不再是质数。

这些我们姑且不管，请问你能算出费尔马数的尾数是几吗？

这个也不很难，请看下面的算式？

n＝0 时，F0=3；

n=1 时， F1＝5；

$n\geq 2$ 时，由 $2^{2^n}=2^{2^{n-2}\cdot 2^2}=2^{4\cdot 2^{n-2}}=(2^4)^{2^{n-2}}=16^{2^{n-2}}$

而以 6 结尾的整数，其任何整数次幂仍是以 6 结尾，故 n≥2 时，Fn 都是以 7 结尾。

附注　　数 n^m 的末两位数

关于数 nm 的末一位数，我们可有下面的结论。

1.以 0、1、5、6 结尾的自然数其任何次方的个位数仍是这些数；n^m 的个位数表

m / n 的尾数	1234	5678	9 ···
2	2486	2486	2 ···
3	3971	3971	3 ···
4	4646	4646	4 ···
7	7931	7931	7 ···
8	8426	8426	8 ···
9	9191	9191	9 ···

2.以 2、3、4、7、8、9 结尾的自然数 n，其 m 次方的个位数见上表：

至于数 nm 的末两位数,只须求出个位数 c 的 m-1 次方的末两位数与 10md＋c（d 为 n 的十位数字）末两位数之积的末两位数。

而数字 0～9 的 m 次方的末两位数有以下规律：

1.数 0 的 m 次方（m＞2）的末两位数为 00；数 5 的 m 次方（m＞2）的末

两位数为 25。

2.个位数为 1 的自然数 n 的 m 次方的末两位数其个位数为 1,十位数为 n 的十位数与 m 的乘积所得的个位数。

C^m的末两位数

M \ c	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22…
2	02	04	08	16	32	64	28	56	12	24	48	96	92	84	68	36	72	44	88	76	52	04
3	03	09	27	81	43	29	87	61	83	49	47	41	23	69	07	21	63	89	67	01	03	09…
4	04	16	64	56	24	96	74	36	44	76	04	16	64	56	24	96	84	36	44	76	04	16…
6	06	36	16	96	76	56	36	16	96	76	56	36	16	96	76	56	36	16	96	76	56	36…
7	07	49	43	01	07	49	43	01	07	79	43	01	07	49	43	04	07	49	43	01	07	49…
8	08	64	12	96	68	44	52	16	28	24	92	36	44	04	32	56	48	84	72	76	08	64…
9	09	81	29	61	49	41	69	21	89	01	09	81	29	61	49	41	69	21	89	01	09	81…

3.数字 c 的 m 次方的末两位数，除 1 次方外，从 2 开始以 20 为公共周期循环（见上表）。

平均数还原

数学中你会遇到各种平均，比如算术平均、几何平均、调和平均、…等等，然而人们最常用的平均还是算术平均。

求 n 个实数 a1、a2、…、an 的算术平均值 a 并不困难，只须按下面公式计算即可：

$\bar{a}$＝（a1＋a2＋…＋an）÷n。

但问题要是反过来，即知道某些数的算术平均值而去求原数，情况就复杂多了，有时甚至无法确定原数。不过某些简单的情形还是有办法解决的。比如：

下面图1中正方形各顶点处的数$\bar{a}$、$\bar{b}$、$\bar{c}$、$\bar{d}$分别是图2中相应顶点外的其它三顶点处的数的算术平均值，说得具体些

即

$\bar{a}$＝（b＋c＋d）/3，　$\bar{b}$＝（a＋c＋d）/3，

$\bar{c}$＝（a＋b＋d）/3，　$\bar{d}$＝（a＋b＋c）/3；

今若知 $\bar{a}$＝11，$\bar{b}$＝10，$\bar{c}$＝9，$\bar{d}$＝ 6，试求原数 a、b、c、d。

乍一看问题有些棘手，但你只要稍稍分析、细心推演便会发现：由$\bar{a}$、$\bar{b}$、$\bar{c}$、$\bar{d}$反求a、b、c、d的公式为

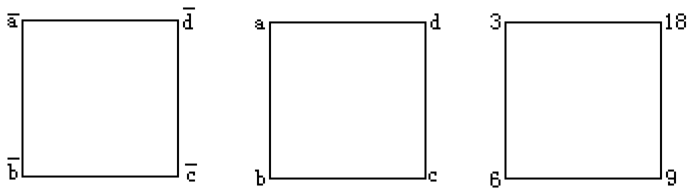
a＝（$\bar{b}$＋$\bar{c}$＋$\bar{d}$）-2$\bar{a}$，

b＝（$\bar{a}$＋$\bar{b}$＋$\bar{d}$）-2$\bar{b}$，

c＝（$\bar{a}$＋$\bar{b}$＋$\bar{d}$）-2$\bar{c}$，

d＝（$\bar{a}$＋$\bar{b}$＋$\bar{c}$）-2$\bar{d}$，

这样，我们便可很快地求出 a=3，b＝6，c＝9，d＝18。



这个问题我们还可以稍加推广：

图4中正方体各顶点处的数$\bar{a}$、$\bar{b}$…、$\bar{h}$分别为图5立方体相应顶点所邻最 近的其它三顶点处的数的算术平均值，比如$\bar{a}$＝（b＋c＋d）/3，$\bar{b}$＝（a＋c+f）/3，…等等：

今若知$\bar{a}$＝7、$\bar{b}$＝5、$\bar{c}$＝9、$\bar{d}$＝5、$\bar{e}$＝3、$\bar{f}$＝8、g＝5、$\bar{h}$＝9，求原数 a、b、c、…、h。

有了前面的启示，我们仍是先来推导一下还原公式，稍稍计算不难发现：

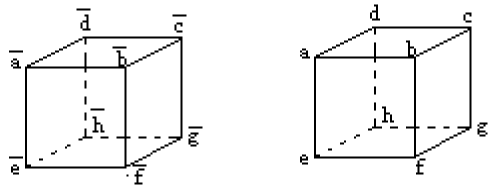
$\bar{a}$＝（$\bar{b}$＋$\bar{e}$＋$\bar{d}$）-2$\bar{g}$，

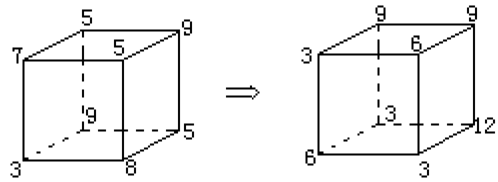
$\bar{b}$＝（$\bar{a}$＋$\bar{c}$＋$\bar{f}$）-2$\bar{h}$，

……………………………

一般地即：原数等于与该顶点邻近的三个平均数之和，再减去其所对顶点处的平均数的 2 倍。

这样可求得：a＝3，b＝6，c＝9，d＝9，e＝6，f＝3，g＝12，h＝3。





具体地可见图 6 和图 7。

这儿想着重指出一点：由平均数求原数的还原，须有足够的“信息”，并非所有情况都行。不过从上面例子也可以看出，某些计算问题先导出公式，再去代入求值往往是方便和必要的。

数列趣题的答案

常常见到这样的趣题，给出若干个数，要求你找出其规律，且判断下一个数是几。有趣的是，它的答案往往不唯一。

比如数列 1，2，3，……，它的第四项是什么数？

你会说：第四项是 4，这固然不错，因为这时你把数列通项 an 视为 n。但如果我说：第四项是 10（或其它数），也正确，因为我们也可以把此数列通项看作：

a_n＝（n－1）（n－2）（n－3）＋n。

再写一个数列：1，4，9，16，……，它的第五项是几？

你会想到 25，这时你是认为：an＝n2。

可如果你把数列通项取为：

a_n＝（n－1）（n-2）（n-3）（n-4）＋n2，

这样该数列第五项便是 49。

这个奥妙出在 n-1、n-2、n-3、n-4 的连乘积上（n＝1，2，3，4 时乘积为 0）。

再如你能否找到一个通项公式，使数列的前面几项是：

1，2，3，5，……

注意到（n-1）（n-2）（n-3）。当 n＝1，2，3 时它的值都是 0，而 n＝4 时它的值是 6，这样通项可取：

a_n=（n-1）（n-2）（n-3）＋n^2，

即$a_n=\frac{n^3}{6}-n^2-\frac{17}{6}n-1$，这样使人看起来便有点玄妙莫测了。

再难一点的例子，请给出数列：

2，4，6，666，10，666，14，……

的通项表达式。

注意到 f（n）=（n=1）（n=2）（n-3）（n-4）（n-5）（n-6）（n-7），f（n）/（n-4）当 n＝4 时值为-36，

f（n）/（n-6）当 n＝6 时值为-120。这样：

a_n＝2n＋[（666-2n） f（n）]/[（36n-4）]-[（666-2n） f（n）]/[120（n-6）]。

有人花了十五年时间，想在看到序列之前就找到它的规律。即对数列{a_n}来讲，任意给定 a、b、c、d、e，而使

a_1=a，a_2＝b，a_3＝c，a_4=d，a_5＝e

这样数列的通项公式可以写成：

$$
\begin{aligned}
a_n = {} & \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}a + \\
& \frac{(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}b + \\
& \frac{(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}c + \\
& \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}d + \\
& \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}e
\end{aligned}
$$

这个通项公式实际上与《计算方法》中的 Lagrange 插值公式有关，这在你以后的学习中将有机会遇到。

满足条件最小的……

这是流传于欧洲的故事。一位国王给他的大臣们出了这样一道算题：

一个自然数，它的一半是完全平方数，它的三分之一是完全立方数，它的五分之一是一个开五次方恰好开尽的正整数。求这个自然数。

据说解答出自一个名不见经传的佣人之手。

我们姑且不谈佣人是如何求得这个数的，这儿用现在的数学方法与语言来解答这个问题。

设所求的自然数 N（显然这种数不唯一），N 的最小值可以写成 $2^a\cdot3^b\cdot5^c$ 的形式，其中 a、b、c 为自然数。依题意：

N/2 是完全平方数，即 $2^{a-1}\cdot3^b\cdot5^c$ 应是完全平方数，这样 a－1 应为 2 的倍数即偶数，即 a 为奇数，同时 b、c 也应为偶数。

N/3 是完全立方数，即 2a·3b-5c 应是完全立方数，那么 b-1 应是 3 的倍数，即 b 为 3k+1 的形式（k＝0，1，2，…），且 a、c 同应为 3 的倍数；

N/5 是一个完全五次方数，即 23b5c-1 应能尽开五次方，这样 c 应为 5m＋1（m＝0，1，2，…）形状，而 a、b 应为 5 的倍数。

综上，a 是既能被 3 整除又能被 5 整除的奇数，则它最小为 15

b 是既能被 2 整除、又能被 5 整除，且被 3 除至 1 的数，则它最小是 10；

c 是既能被 2 整除、又能被 3 整除，且被 5 除余 1，则它最小是 6。

这样最小的 $N=2^{15}\cdot3^{10}\cdot5^{6}=30233088000000$，它是一个比 30 万亿还大的天文数字！

这儿再强调一句：满足题设的自然数 N 显然不唯一。

附记　有些问题的答案貌似简单，但实际结果往往却大的惊人，比如“阿基米德群牛问题”也是如此，问题是这样的：

有一群白、黑、褐、杂色牛中，已知白色公牛数等于（1/2＋1/3）黑色公牛数加上褐色公牛数；黑色公牛数等于（1/4＋1/5）杂色公牛数加上褐色公牛数；杂色公牛数等于（1/6＋1/7）白色公牛数加上褐色公牛数。

又白色母牛数等于（1/3＋1/4）黑牛（包括公、母牛）数；黑色母牛数等于（1/4＋1/5）杂色牛数；杂色母牛数等于（1/5＋1/6）褐牛数；褐色母牛数等于（1/6＋1/7）白牛数。

同时白色和黑色公牛全体恰好可摆成一个正方形；杂色和褐色公牛全体恰好可摆成一个三角形。

请问：每种颜色的公、母牛各几何？

这个问题又列成含八个未知数的七个方程，答案是：白色公牛数为 1598×10^{206541}（公牛总数是 7766×10^{206541}）这是一个大得出奇的天文数字。